UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Álgebra y Fundamentos

TESIS DOCTORAL

Equisingularidad de curvas algebroides alabeadas

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Julio Antonio Castellanos Peñuela

DIRECTOR:

José Manuel Aroca

Madrid, 2015

Julio Antonio Castellanos Peñuela

EQUISINGULARIDAD DE CURVAS ALGEBROIDES ALABEADAS

Departamento de Algebra y Fundamentos
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1982

Colección Tesis Doctorales. Nº 150/82

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1982
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-20165-1982

U N I V E R S I D A D   C O M P L U T E N S E

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Departamento de Algebra y Fundamentos

"EQUISINGULARIDAD DE CURVAS ALGEBROIDES ALABEADAS"

Memoria presentada para optar al Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por Julio Antonio Castellanos Peñuela

Madrid, Octubre, 1981

Mi primer y más profundo agradecimiento para el Prof. José Manuel Aroca, Catedrático de Geometría de la Universidad de Valladolid, quien ha dirigido la realización de esta memoria.

Quiero expresar mi agradecimiento a los miembros del Departamento de Algebra y Fundamentos de esta Facultad, y en especial a su director Prof. Pedro Abellanas. También estoy agradecido a los miembros del Departamento de Algebra y Geometría de la Universidad de Valladolid, por su excelente acogida en mis estancias en dicha Universidad durante la realización de esta memoria.

Finalmente, mi agradecimiento a todas aquellas personas que han contribuido a que esta memoria se llevar a cabo, muy especialmente a Ma. José, por su apoyo moral durante estos años y a Soledad Estévez por la paciente labor metanografica.

a mis padres

INDICE

INTRODUCCION

El origen de la teoría de equisingularidad se encuentra en los trabajos de Brauner |5|, Burau |8| y Zariski |39| que asocian a una curva analítica plana compleja de ecuación $f(x,y) = 0$ un nudo toroidal en R^3, procediendo por identificación de $\mathbb{C}^2$ con R^4, tomando la sección de la curva por una esfera, con centro en el punto singular y realizando la proyección estereográfica. El tipo de inmersión del nudo queda unívocamente determinado por una serie de pares de números $(m_1,\mu_1),\ldots,(m_n,\mu_n)$, que se pueden calcular en términos puramente algebraicos a partir de la ecuación de la curva.

Zariski establece en su artículo |35| toda una serie de criterios equivalentes a la igualdad del tipo de inmersión de los nudos asociados a dos curvas algebroides planas. Estos criterios son la base de la larga lista de artículos sobre equisingularidad y saturación |37|, |38|, ..., en los cuales, prescindiendo del origen del problema de clasificación de nudos, establece una teoría puramente algebraica encaminada a expresar cuando la singularidad de una variedad V en un punto P es similar a la de otra variedad V' en el punto P'. No obstante, los resultados de Zariski se limitan casi siempre a hipersuperficies y a cuerpos de característica cero, y su teoría es completa unicamente en el caso de singularidades de curvas planas. En este caso, la igualdad del tipo de inmersión de los nudos asociados a las curvas, es equivalente a una serie de criterios entre los que destacamos los siguientes:

i) Igualdad del proceso de reducción de la singularidad.

Dada una curva algebroide irreducible $\mathcal{O}$, por transformaciones cuadráticas sucesivas se obtiene una sucesión

$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{O}_r = \overline{\mathcal{O}}$, donde $\overline{\mathcal{O}}$ es el cierre integro de $\mathcal{O}$ en su cuerpo de fracciones, de este modo a $\mathcal{O}$ se le asocia una sucesión numérica $e(\mathcal{O}) \geq e(\mathcal{O}_i) \geq \ldots \geq e(\mathcal{O}_r) = 1$ que recibe el nombre de sucesión de multiplicidades de $\mathcal{O}$. Entonces diremos que dos curvas $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ tienen igual proceso de reducción si coinciden sus sucesiones de multiplicidades.

(ii) Igualdad de semigrupo de valores.

El cierre íntegro de $\mathcal{O}$ en su cuerpo de fracciones $\overline{\mathcal{O}}$ es un anillo completo de valoración discreta, luego existe una valoración intrínseca v de $\mathcal{O}$ e $\mathrm{Im} v - \{0\} = \Gamma(\mathcal{O}) \subset \mathbb{N}$ es un subsemigrupo de complemento finito que recibe el nombre de semigrupo de valores de $\mathcal{O}$.

(iii) Igualdad de exponentes característicos.

Si la característica del cuerpo base es cero se pueden encontrar una parametrización de Puiseux de $\mathcal{O}$ $\{x = t^n,\ y = y(t),\ \nu(y) \geq n\}$ y a esta parametrización le asociamos una serie de números β_i llamados exponentes característicos de $\mathcal{O}$. A estos criterios se pueden añadir otros como equisaturación, igualdad de pares característicos, etc.

En el caso de que la característica del cuerpo base sea distinta de cero, los conceptos que intervienen en algunos de los criterios anteriores continuan teniendo sentido como, por ejemplo, la sucesión de multiplicidades o el semigrupo, pero otros como la saturación o los exponentes característicos, o bien carecen de sentido, o bien dejan de ser intrínsecos y pasan a depender de la inmersión de la curva en el plano, y es necesario sustituir el desarrollo de Puiseux por un desarrollo más ligado al proceso de reducción de la singularidad que es el de Hamburger-Noether (ver Campillo | 9 |).

Un análisis de la construcción del semigrupo de valores o de la sucesión de multiplicidades prueba que estos dependen esencialmente de la anulación de determinados coeficientes en el desarrollo de Hamburger-Noether, por tanto existe una semicontinuidad del semigrupo que permite dada una familia de curvas planas hablar de "curva genérica" de la familia en términos de equisingularidad. Este hecho permite comparar, dada una familia de curvas, la curva genérica de la familia y una curva específica de la familia con lo que se puede hablar de familia equisingular de curvas.

Zariski en |35|, |37| estudia criterios de equisingularidad de familias de curvas planas. Dichos criterios han sido detallados y ampliados sustancialmente por Teissier |29|, Merle |22|, Wahl |33|, quienes demuestran esencialmente que una familia de curvas planas es equisingular si existe un proceso de reducción simultánea de las curvas de la familia en el sentido de que la reducción de la singualridad de la "curva genérica" por transformaciones cuadráticas se puede trasladar a una reducción de la singularidad de la familia considerada como hipersuperficie, por transformaciones monoidales. La equisingularidad en familia es en cierto sentido "más fácil" que la de curvas, puesto que la semicontinuidad del semigrupo de valores garantiza que este es constante simplemente con que se mantenga el número de sus "huecos" sin necesidad de suponer nada sobre la distribución de los de equisingularidad dada, es en cierto modo, una generalización de un problema de tipo Riemann local. Esta versión del problema de moduli con la equisingularidad de Zariski para curvas planas fue resuelta completamente por Merle |22| y Ebey |12|, siempre en el caso de característica cero. Posteriormente, Nobile |23|, |24|, da una solución del mismo utilizando ecuaciones paramétricas, y Campillo |10| con desarrollos de H-N resuelve el problema, obteniendo un esquema de moduli función de la clase de equisingularidad, del cual por cambio de base se obtiene el espacio de moduli correspondiente a dicha clase, sobre un cuerpo de característica arbitraria. Campillo demuestra también que dicho espacio es irreducible, resolviendo una conjetura de Zariski y Merle.

La construcción del espacio de moduli lleva a considerar la existencia de una deformación equisingular versal, de la cual por cambio de base, se obtienen todas las deformaciones equisingulares. La construcción de esta deformación para curvas planas en característica cero se debe a Wahl |33| y fue posteriormente simplificada por Nobile |24|. Para curvas alabeadas presentamos en esta memoria una construcción de una deformación equisingular versal.

En resumen los principales resultados a que llegamos en esta memoria son los siguientes:

i) La definición de equisingularidad propuesta para deformaciones de curvas alabeadas irreducibles, basada en la existencia de un desarrollo de Hamburger-Noether (H-N) en familia es equivalente a la equisingularidad residual de Stuz |27| basada en equirresolución por trans formaciones monoidales. Esta implica a la vez la posible generalización de la de Zariski para curvas planas irreducibles, consistente en la igualdad de las sucesiones de multiplicidad de las curvas genéricas y específica.

ii) La existencia de una deformación equisingular universal en el caso de deformaciones de una parametrización de una curva.

iii) Construcción de la deformación equisingular miniversal para el caso de deformaciones de una parametrización.

La presente memoria está dividida en 5 capítulos cuyo resumen incluimos a continuación:

En el capítulo 0 están contenidos de forma esquemática los resultados dispersos sobre curvas alabeadas, que son necesarios para el buen entendimiento de esta memoria.

En el capítulo I pasamos a estudiar las familias de curvas con el nombre usual de deformaciones, con la distinción entre deformación de una curva algebroide irreducible con espacio de parámetros A, y deformación de una parametrización sobre A.

Definición 1.1. Sea $\mathcal{A}$ una categoría de anillos. Dadas una curva algebroide (irreducible) X_o y un anillo $A \in Ob(\mathcal{A})$ llamaremos $\mathcal{A}$-deformación de X_o sobre A a todo esquema tal que:

$$\begin{tikzcd} X_o \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\ k \arrow[r] & \mathrm{Spec}\ A \end{tikzcd}$$

es decir, $X_o \approx X \times_{\mathrm{Spec}\ A} \mathrm{Spec}$ o, lo que es lo mismo, X_o es la fibra de X sobre el punto cerrado imagen de Spec k en Spec A. En este caso pondremos $|X, X_o, \mathrm{Spec}\ A|$

Si $X = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}$ y $X_o = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_o$ llamaremos indistintamente deformación a X y $\mathcal{O}$. Por dualidad se verifica $\mathcal{O}_o \approx \mathcal{O} \otimes_A k$ siendo $\otimes_A$ el producto tensorial en A, y como $\mathcal{O}_o$ es irreducible, la fibra del morfismo en el origen es reducida. Escribiremos $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A|$.

<u>Definición 2.1</u>. Dada una parametrización primitiva $\chi = \{\phi_1(t), \ldots$ $\ldots, \phi_N(t)\}$ de una curva algebroide irreducible $\mathcal{O}_o$, diremos que $\Phi = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_N\}$ con $\Phi_i \in A||t||$, $A \in \hat{\mathcal{C}}$ (categoría de las k-álgebras finitamente generadas locales, noetherianas y completas) es una <u>deformación de la parametrización</u> si res $\Phi_i = \Phi_i + m_A A||t|| =$ $= \phi_i(t)$, y escribiremos $|\Phi, \chi, A|$.

Ambos conceptos son distintos y estan relacionados como indicamos a continuación cuando A pertenezca a la categoría $\hat{C}$.

Dada $|\Phi, \chi, A|$ deformación de una parametrización χ de una curva $\mathcal{O}_o$ se le asocia una deformación $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A|$ donde $\mathcal{O} \approx \dfrac{A||\underline{X}||}{(\ker \Phi)}$ y Φ es el homomorfismo $\Phi(X_i) = \Phi_i$. Sin embargo no es una deformación en el sentido de la definición pues $\mathcal{O} \otimes_A k \approx \dfrac{\mathcal{O}}{m_A \mathcal{O}}$ es $\left(\dfrac{\mathcal{O}}{m_A \mathcal{O}}\right)_{red} \approx \mathcal{O}_o$ pudiendo aparecer en $\mathcal{O} \otimes_A k$ componentes sumergidas es decir elementos nilpotentes, como se ve en el ejemplo siguiente:

Sea $|\Phi, \chi, A|$ con $\Phi = \{\Phi_1 = t^4, \Phi_2 = t^5, \Phi_3 = ut^7\}$, $\chi = \{\phi_1 = t^4, \phi_2 = t^5, \phi_3 = 0\}$, $A = k||u||$. Definimos $\Phi(X_i) = \Phi_i$ y la deformación asociada es $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A|$ con $\mathcal{O} \approx \dfrac{A||X_1,X_2,X_3||}{(\ker \Phi)}$

$\mathcal{O}_o \approx \dfrac{k||X_1,X_2,X_3||}{(X_1^5 - X_2^4, X_3)}$ y sin embargo $\mathcal{O}_o \neq \dfrac{\mathcal{O}}{m_A\mathcal{O}}$ ya que $X_3 \notin \dfrac{(\ker \Phi)}{u.\mathcal{O}}$ y $X_3^2 \in \dfrac{(\ker \Phi)}{u.\mathcal{O}}$, pues $u^2X_1 X_2^3 - X_3^2 \in (\ker \Phi)$.

La existencia de una parametrización para una deformación dada no siempre está garantizada. En el caso analítico, Teissier |28| da condiciones para su existencia siempre que el espacio de parámetros de una deformación plana sea liso y de dimensión 1 y Raynaud |29| lo hace si el espacio de parámetros es normal y de cualquier dimensión. En ambos casos la existencia de parametrización es equivalente a la constancia del invariante δ definido por $\delta(\mathcal{O}_o) = \dim_k \dfrac{\overline{\mathcal{O}}_o}{\mathcal{O}_o}$.

También estudiamos en este capítulo <u>la deformación de un desarrollo de H-N sobre A o desarrollo de H-N en familia</u> que se define en la sección 3 y que lleva asociada naturalmente cuando $A \in \hat{C}$ una deformación de la parametrización de la curva, que tiene como desarrollo de H-N la reducción de este módulo m_A.

Consideramos también en este capítulo las nociones de <u>curvas genérica y específica de una deformación</u>, como traslación natural de las del caso analítico complejo. El concepto de una curva específica es de traslación inmediata y el único problema se presenta al pretender trasladar la noción de curva genérica, puesto que no contamos sino con un punto cerrado. Para resolver este problema sustituimos el hecho de tomar la fibra en un punto perteneciente a un subespacio y próximo al punto de partida, por la localización en el punto genérico del subespacio, lo cual lleva consigo la necesidad de cambiar el cuerpo base extendiendolo al cuerpo de funciones racionales en el subespacio considerado.

Este proceso produce problemas al considerar la curva genérica $\mathcal{O}_u$ definida a lo largo de una sección s de ideal p, $\mathcal{O}_u \approx (\mathcal{O}_p)^\wedge \hat{\otimes}_{k(p)} \overline{k(p)}$. Si la característica del cuerpo base es $p \neq 0$ $\mathcal{O}_u$ puede en general no ser una curva, pues puede no ser reducido como prueba el siguiente ejemplo debido a Abyhankar | 2 |.

Sea $\mathcal{O} \simeq \dfrac{A||X_1,X_2||}{(X_2^p + u\ X_1^p)}$ con $A = k||u||$ y k de característica p, sea $p = (X_1,X_2)\mathcal{O}$ entonces $\hat{\mathcal{O}}_p \approx \dfrac{k((u))||X_1,X_2||}{(X_2^p + u\ X_1^p)}$ con k((u)) cuerpo de fracciones de $k||u||$. Sea $\overline{k((u))}$ cierre algebraico de k((u)), existe $u_o \in \overline{k((u))}$ con $u_o^p = u$, y $\mathcal{O}_u = (\mathcal{O}_p)^\wedge \hat{\otimes}_{k((u))} k((u))$

$$\approx \frac{\overline{k((u))}||X_1,X_2||}{(X_2 + u_o X_1)^p}$$ tiene elementos nilpotentes.

Si la característica del cuerpo base es cero demostramos que dada una sección de la deformación, la curva genérica a lo largo de dicha sección es reducida y además depende sólo de la sección considerada como subvariedad de $\mathcal{O}$, es decir no depende de la retracción Spec $\mathcal{O} \longrightarrow$ Spec A que define la deformación. Si la característica del cuerpo base es distinta de cero, aún en el caso en que la curva genérica a lo largo de una sección sea reducida, dicha curva depende de la retracción que define la deformación como se ve en el ejemplo

4.6. debido a Abyhankar.

La similitud del desarrollo de H-N de una curva con el definido para una deformación de un desarrollo de H-N inspira la posibilidad de definir el <u>semigrupo de valores asociado a una deformación de una parametrización</u>. Este semigrupo no es el semigrupo de los ordenes de las series del anillo, sino solamente contiene las ordenes de los elementos en los que el coeficiente de la forma inicial es una unidad, lo cual resulta de forma natural del proceso de generalización del semigrupo ya que la generalización de un elemento $\neq 0$ en un cuerpo es una unidad en un anillo.

Lamentablemente el semigrupo de una deformación de una parametrización no tiene en general complementario finito como prueba el siguiente ejemplo:

Consideremos $|\Phi, \chi, A|$, con $\Phi = \{\Phi_1 = ut + t^2, \Phi_2 = t^3\}$, $\chi = \{\phi_1 = t^2, \phi_2 = t^3\}$, y $A = k||u||$. El semigrupo es $S(\Phi) = \{3n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene complementario finito.

Sin embargo en el último capítulo veremos que en el caso de una deformación de un desarrollo de H-N el semigrupo tiene complementario finito.

Lo que si se verifica es que si el semigrupo es de complemento finito, es decir, si existe conductor c para el semigrupo, existe en cierto sentido un <u>conductor para la deformación de la parametrización en $A||t||$</u>, y c es su orden. Con lo cual, en este caso, para que coincidan dos deformaciones de dos desarrollos de H-N de una curva basta con que sus matrices tengan las c-primeras columnas iguales.

<u>En el capítulo II</u> se estudia el efecto de una transformación monoidal sobre una familia de curvas en el sentido siguiente.

Consideremos una deformación de una curva con espacio de parámetros A, entonces, la fibra genérica de la deformación inducida en el transformado monoidal de la deformación, por la retracción de esta, es isomorfa a la transformada cuadrática de la curva genérica de la deformación.

No se puede decir lo mismo para la curva específica, porque el morfismo dado por la transformación monoidal no es finito como demuestra el ejemplo siguiente:

Sea $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A|$ con $\mathcal{O} \approx \dfrac{A||X_1,X_2,X_3||}{(X_2^3+X_1^2\,u+X_1^5)}$, $\mathcal{O}_o \approx \dfrac{k||X_1,X_2||}{(X_2^3+X_1^5)}$

$A = k||u||$. El transformado monoidal estricto de $\mathcal{O}$ con centro $p = (X_1,X_2)\mathcal{O}$ es $\mathcal{O}' \simeq \dfrac{A||X_1,X_2'||}{(X_2'^3X_1+u+X_1^3)}$ donde $X_2 = X_1\,X_2'$.

La curva específica de $\mathcal{O}'$ es $(\mathcal{O}')_o \simeq \dfrac{k||X_1,X_2'||}{(X_1(X_2'^3+X_1^2))}$ y la transformada cuadrática de $\mathcal{O}_o$ es $(\mathcal{O}_o)' \simeq \dfrac{k||X_1,X_2'||}{(X_2'^3+X_1^2)}$.

Cuando tenemos una deformación de una parametrización equimúltiple, es decir, con curvas genérica y específica con igual multiplicidad, la deformación se comporta respecto de las transformaciones monoidales analogamente a una parametrización de una curva irreducible respecto de la transformación cuadrática. Existe un solo transformado monoidal, que se calcula facilmente por medio de la deformación, y se verifica en este caso que aunque el transformado monoidal de las deformaciones no es en general una deformación de una curva reducida, si admite una parametrización cuyas curvas específica y genérica son las transformadas cuadráticas de las curvas específica y genérica de la deformación dada.

El capítulo III comienza con las tres definiciones más naturales de equisingularidad en familia de curvas algebroides irreducibles, desde el punto de vista del proceso de reducción de la singularidad. Naturalmente las condiciones de validez no son las mismas puesto que las dos primeras son validas, en principio en característica cero, aunque con nuestra adaptación, fijada la retracción, son validas para cualquier característica. Las definiciones son las siguientes:

ES1 Dada la deformación $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ con $A \in \hat{C}$ regular y una única sección singular s, diremos que es equisingular ES1 a lo largo de s si se verifican las condiciones siguientes:

(i) Sea p el ideal de la sección s y m el ideal maximal de $\mathcal{O}$, si $\tilde{\pi}_1 : Bl\ (\mathcal{O}) \longrightarrow Spec\ (\mathcal{O})$, $\tilde{\pi}_1$ es finito y para todo punto cerrado $m_1 \in \tilde{\pi}^{-1}(m)$ el transformado monoidal en la dirección de m_1 de $\mathcal{O}$, $\pi_1 : Spec\ ((Bl_p(\mathcal{O}))_{m_1})\hat{}\ \longrightarrow Spec\ \mathcal{O}$ es independiente del punto m_1 utilizado para construirlo.

(ii) Sea $p_{i-1} \in Spec\ \mathcal{O}_{i-1}$ un ideal primo minimal que yace sobre p_{i-2} via el homomorfismo π_{i-1}. El morfismo $\tilde{\pi}_i : Bl_{p_{i-1}}(\mathcal{O}_{i-1}) \longrightarrow Spec\ \mathcal{O}_{i-1}$ es finito y si m_{i-1} es el ideal maximal de $\mathcal{O}_{i-1}$ el morfismo $\pi_i : Spec\ (\mathcal{O}_i) = Spec\ ((Bl_{p_{i-1}}(\mathcal{O}))_{m_{i-1}})\hat{}$ —
$\longrightarrow Spec\ \mathcal{O}_{i-1}$

es independiente del punto cerrado $m_i \in \tilde{\pi}_i^{-1}(m_{i-1})$ utilizado para definirlo.

(iii) Para todo i, o bien $\mathcal{O}_i$ es regular, o su lugar singular es $\pi_i^{-1} \ldots \pi_1^{-1}(V(p))$.

(iv) Existe un $r \in \mathbb{N}$ con $\mathcal{O}_r$ regular (y por tanto $\mathcal{O}_j$, con $j > r$, regular).

(v) Sea $p^* = {}^a\pi_r^{-1} \ldots {}^a\pi_1^{-1}(p)$ (con ${}^a\pi_i : \mathcal{O}_{i-1} \longrightarrow \mathcal{O}_i$ morfismos asociado a π_i) entonces $\left(\frac{\mathcal{O}_2}{p^*\mathcal{O}_r}\right)_{red} \simeq A$.

ES2. Dada la deformación $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ con $A \in \hat{\mathcal{C}}$ dominio de integridad y s la única sección singular dada por el ideal p, diremos que es <u>equisingular ES2 a lo largo de la sección s</u> si se verifica:

(i) $\mathcal{O}_p$ es geometricamente no ramificado, es decir la curva genérica $\mathcal{O}_u \simeq (\mathcal{O}_p)^\wedge \hat{\otimes}_{k(p)} \overline{k(p)}$ es dominio de integridad.

(ii) $E(\mathcal{O}_o) = E(\mathcal{O}_u)$, $E(\ )$ = sucesión de multiplicidades (0-5).

<u>ES3</u>. Dada la deformación $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ con $A \in \hat{\mathcal{C}}$ y s la única sección singular, diremos que es <u>equisingular ES3 a lo largo de s</u> si admite un desarrollo de H-N relativo a la sección s.

Los ejemplos 1.1.2, 1.1.3, 1.2.3, 1.32 ilustran las definiciones anteriores.

En la segunda sección del capítulo III se comparan las definiciones anteriores probándose que

ES1 $\Longleftrightarrow$ ES3 $\Longrightarrow$ ES2

El problema de la comparación de ES2 y ES1 tropieza de nuevo con la diferencia entre platitud normal y equimultiplicidad. Para el caso de curvas planas ES1 $\Longleftrightarrow$ ES2, sin embargo en este caso de curvas alabeadas la igualdad de las sucesiones de multiplicidad de la curva plana genérica y específica, lo más que permite afirmar es la equimultiplicidad de la familia curvas, considerada como variedad, a lo largo del espacio de parámetros. Si la variedad es intersección completa estricta Herman-Orbanz |14| prueban que en una primera transformación monoidal, no se presentan componentes sumergidas en la fibra específica ya que la variedad es normalmente plana a lo largo del espacio de parámetros. No obstante si la variedad no es intersección completa estricta no está garantizado este hecho, y además no se sabe en qué condiciones la intersección completa estricta es estable por transformaciones monoidales.

La presencia de componentes sumergidas es un factor que puede influir en la multiplicidad, y así el hecho de la igualdad de la sucesión de multiplicidades puede ser ficticio en el sentido de deberse a las componentes sumergidas.

<u>En el capítulo IV</u> estudiamos la existencia de una deformación versal equisingular ES3 de una curva algebroide irreducible y reducida $\mathcal{O}$. En el caso de curvas planas hay diversos criterios debidos a Wahl |33|, Nobile |23|, y Campillo |10| todos ellos equivalentes pero que no son válidos cuando la dimensión de inmersión es superior a 2, puesto que en este caso se presentan serias dificultades al no coin-

cidir las parametrizaciones de las deformaciones y las deformaciones de las parametrizaciones.

En la primera sección construimos por un proceso inductivo un functor sobre la categoría H de deformaciones de parametrizaciones equisingulares y probamos que es prorrepresentable y liso. El proceso de construcción tiene tres etapas.

1) Construcción de un functor de deformaciones de parametrizaciones y una acción functorial de grupos con la que clasificamos las deformaciones equivalentes.

2) Construcción de un "subfunctor" del anterior que limita a considerar las equimúltiples a lo largo de su sección natural y estable por la acción del grupo antes citado.

3) Construir por un proceso inductivo una familia de functores, por "transformaciones monoidales" a lo largo de la sección natural y cuyo límite es el functor de deformaciones equisingulares de la parametrización $\overline{\mathrm{ES}}$ equivalente al ES3.

El proceso de demostración de que los functores anteriores son prorrepresentables, utiliza en cada caso los criterios de Schelessinger |26|.

Si consideramos el functor anterior $\overline{\mathrm{ES}}$ sobre la categoría L_H de deformaciones que admiten parametrización no podemos garantizar que este nuevo functor sea prorrepresentable pues en general una parametrización no nos determina una deformación. No obstante vemos que este functor es prorrepresentable en la categoría más amplia H y no en la L_H.

En la segunda sección hacemos una construcción explícita de un representante del functor $\overline{ES}$ de deformaciones equisingulares de una parametrización de $\mathcal{O}_o$. Para ello demostramos la existencia de una <u>deformación de una parametrización equisingular ES3 miniversal con espacio de parámetros regular</u>. La construcción utiliza el desarrollo de H-N, y se basa en ampliar el desarrollo de la curva $\mathcal{O}_o$ al de la curva genérica más general posible con la misma sucesión de multiplicidades que $\mathcal{O}_o$. Esto se consigue ampliando la matriz del desarrollo de $\mathcal{O}_o$, a una matriz tan amplia como la del cierre de Arf de $\mathcal{O}_o$ y sustituyendo ciertos elementos de dicha matriz por indeterminadas de forma conveniente para que se mantenga la sucesión de multiplicidades. De esta manera obtenemos <u>la existencia de un desarrollo de H-N miniversal sobre un anillo regular</u>, o lo que es equivalente, una deformación equisingular ES3 miniversal con espacio de parámetros regular, en la categoría H de deformaciones de una parametrización.

Sin embargo no podemos encontrar por el mismo proceso una deformación equisingular ES3 miniversal para la categoría L_H de deformaciones con parametrización, ya que un desarrollo de H-N no nos proporciona en general una deformación de la parametrización como prueba el ejemplo siguiente:

Sea el desarrollo $|D, \mathcal{O}_o, A|$ con $A = k||u||$ y D dado por

$$\begin{cases} x_2 = x_1\,\zeta_1 \\ x_3 = x_1\,\zeta_2 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x_1 = \zeta_1^4 \\ \zeta_2 = u\,\zeta_1^3 \end{cases}$$

su parametrización asociada es $\Phi = \{\Phi_1 = t^4,\ \Phi_2 = t^5,\ \Phi_3 = u\ t^7\}$ que, como vimos en la página IX, verifica que su deformación asociada no es propiamente una deformación.

CAPITULO 0

PRELIMINARES SOBRE CURVAS ALABEADAS

El objetivo de este capítulo es reproducir los resultados y definiciones necesarias para el buen entendimiento del resto de la memoria. Las fuentes utilizadas son esencialmente Campillo |9|, Vicente |31|, Zariski |35|.

Salvo mención expresa de lo contrario trabajaremos sobre un cuerpo base k algebraicamente cerrado y de característica arbitraria.

1. Curva algebroide. Llamaremos curva algebroide irreducible sobre k al Spec ($\mathcal{O}$) donde $\mathcal{O}$ es un dominio de integridad, noetheriano, local, completo, de dimensión de Krull 1 y con cuerpo de coeficientes k. Llamaremos indistintamente curva tanto al anillo $\mathcal{O}$ como a su espectro.

De esta definición resultan los hechos siguientes:

1.1. Como $\dim(\mathcal{O}) = 1$, existen ideales q primarios para m (ideal maximal de $\mathcal{O}$) generados por un solo elemento x, llamado parámetro de $\mathcal{O}$.

1.2. k es un cuerpo isomorfo a $\frac{\mathcal{O}}{m}$ via el isomorfismo canónico.

1.3. Embd ($\mathcal{O}$) = $\dim_k (\frac{m}{m^2})$ es finita ya que $\mathcal{O}$ es noetheriano. Se llama dimensión de inmersión de $\mathcal{O}$ a dicho número.

1.4. Sea $B = \{x_1,\ldots,x_N\}$ una base de m, como $\mathcal{O}$ es completo, dadas $X_1,\ldots,X_N$ indeterminadas sobre k, existe un ideal primo p de $k||\underline{X}|| = k||X_1,\ldots,X_N||$ de altura N-1 con $\mathcal{O} \simeq \frac{k||\underline{X}||}{p}$.

El mínimo valor de N que verifica dicho resultado es Embd $(\mathcal{O})$. Diremos en este caso que el ideal p define la curva $\mathcal{O}$ en un espacio afín de dimensión N.

2. Cono tangente. El anillo graduado de la curva $\mathcal{O}$ respecto de m $Gr_m(\mathcal{O}) = \sum_{i\geq 0} \frac{m^i}{m^{i+1}}$ se puede identificar canónicamente con $Gr_m(\mathcal{O}) \approx \frac{k[[\underline{X}]]}{In\ p}$, siendo $In\ p$ el ideal homogéneo de $k[\underline{X}]$ generado por las formas iniciales de los elementos de p.

Llamaremos cono tangente a la curva $\mathcal{O}$ a la variedad algebraica afín de k^N definida por el ideal $In\ p$ (ó a Spec $(\frac{k[\underline{X}]}{In\ p})$).

2.1. El cono tangente es una recta que pasa por el origen de coordenadas, $\sqrt{In\ p} = (X_2 + \alpha_1 X_1, \ldots, X_N + \alpha_N X_1)$, $\alpha_i \in k$.

3. Parametrizaciones locales. El teorema de preparación de Weierstrass y los teoremas de normalización que resultan de él, permiten escribir $\mathcal{O} \approx k[[x_1,\ldots,x_N]] \approx k[[x_1]][x_2,\ldots,x_N]$, $x_i = X_i + p$ como una extensión entera de $k[[x_1]]$. Si denotamos por F el cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}$; entonces $F = k((x_1))[x_2,\ldots,x_N]$.

3.1. El cierre íntegro de $\mathcal{O}$ en F, $\overline{\mathcal{O}}$, es un anillo de valoración discreta de F, extensión de $k[[x_1]]$, completo y de dimensión 1. Entonces $\overline{\mathcal{O}} \approx k[[t]]$, $F \approx k((t))$ donde t es un parámetro de uniformización de , que recibirá el nombre parámetro de uniformización de la curva $\mathcal{O}$. La valoración $v(x) = o(x(t))$ de $\overline{\mathcal{O}}$, que es la única extensión de la valoración de $k[[x_1]]$, y es independiente de x, recibe el nombre de valoración asociada a la curva $\mathcal{O}$.

3.2. Con la notación anterior, dada una base $\{y_1,\ldots,y_N\}$ de m donde cada y_i es una serie en t de orden positivo, las expresiones $\{y_1 = y_1(t),\ldots,y_N = y_N(t)\}$ se llaman <u>ecuaciones paramétricas locales de la curva</u> , que se denominarán <u>primitivas</u> sino existe otro parámetro de uniformización u con $t^n = u$ en $\overline{\mathcal{O}}$ $n > 1$.

4. <u>Parámetro transversal</u>. Un elemento x de m se dice <u>transversal</u> si $x + m^2$ no es nilpotente en $Gr_m(\mathcal{O})$. Geométricamente, x se expresa en una base de m, $x + m^2 = \sum_{1\leq i\leq N} \lambda_i(x_i + m^2)$ x es transversal si la variedad Ω_x que tiene por ecuaciones $\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_N X_N = 0$ no contiene al caso tangente de la curva para ninguna inmersión.

Si x es un parámetro transversal de $\mathcal{O}$ se verifica que

i) para cualquier base $\{x_1,\ldots,x_N\}$ de m con $x_1 = x$, $\mathcal{O} \simeq k||x_1|| \, |x_2,\ldots,x_N|$ es extensión entera de $k||x_1||$ y

ii) x es un elemento de valor mínimo para v, donde el valor de x es la <u>multiplicidad de la curva</u> $e(\mathcal{O}) = e(m) = |F:k((x))|$.

5. <u>Transformada cuadrática</u>. Llamaremos transformación cuadrática de <u>una curva algebroide irreducible X</u> a $T(X) = Bl_m(\mathcal{O}) =$

$$= \bigcup_{y \in m - \{0\}} \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}\,|y^{-1}m|) \quad \text{donde} \quad y^{-1}.m = \{z/y,\ z \in m\}.$$

5.1. Si x es un parámetro transversal de $\mathcal{O}$, $T(X)/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia dada por $\Omega_y \sim \Omega_x \in T(X)$, $\Omega_y \sim \Omega_x \iff (\mathcal{O}\,|y^{-1}m|)_{\Omega_y} \simeq (\mathcal{O}\,|z^{-1}m|)_{\Omega_z}$, está en correspondencia biunívoca con $\mathrm{Spec}(\,|x^{-1}m|^y)$, donde $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}\,|x^{-1}m|$ es el anillo local de una curva algebroide irreducible a la que llamaremos <u>transformada cuadrática de $\mathcal{O}$</u>.

5.2. Si $\{x_1 = x, x_2, \dots, x_N\}$ es una base de m existen $\{a_2, \dots, a_N\}$ k tales que $\{x_1, \frac{x_2}{x_1} - a_2, \dots, \frac{x_N}{x_1} - a_N\}$ forman una base de m_1 ideal maximal de $\mathcal{O}_1$, y $\{x_1(t), \frac{x_2(t)}{x_1(t)} - a_2, \dots$ $\dots, \frac{x_N(t)}{x_1(t)} - a_N\}$ constituyen unas ecuaciones paramétricas de $\mathcal{O}_1$.

5.3. Se verifica que embd $(\mathcal{O}_1) \leq$ embd $(\mathcal{O})$ y $e(\mathcal{O}_1) \leq e(\mathcal{O})$.

5.4. Si denotamos por $\mathcal{O}_i$ la transformada cuadrática i-ésima de $\mathcal{O}$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_1 \subset \dots \subset \mathcal{O}_r = \overline{\mathcal{O}}$ y la sucesión $E(\mathcal{O}) = (e(\mathcal{O}), \dots, e(\mathcal{O}_i), \dots, e(\mathcal{O}_r) = 1)$, se llama <u>sucesión de multiplicidades de $\mathcal{O}$</u>.

6. <u>Desarrollos de Hamburger-Noether de una curva</u>. Vista la construcción de la transformada cuadrática de una curva, vamos a describir un proceso que nos permite expresar mediante unas ecuaciones paramétricas, la familia de transformados cuadráticos de una curva dada.

Dadas unas ecuaciones paramétricas de la curva $\{x_1(t), \dots, x_N(t)\}$ con x_1 transversal, se verifica que $n = e(\mathcal{O}) =$ $= v(x_1) \leq v(x_i)$, $i=2,\dots,N$.

Sea $Y = \begin{pmatrix} x_i \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$. Dividiendo por x_1, $Y = A_{01} \cdot x_1 + R_1$ con $R_1 = \begin{pmatrix} z_{12}(t) \\ \vdots \\ z_{1N}(t) \end{pmatrix}$, repitiendo el proceso siempre que se pueda, y llamando $v\begin{pmatrix} y_2(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{pmatrix} = \min \{v(y)\}$ llegamos a uno de los dos casos siguientes:

(i) Existe $h > 0$, $A_{oi} \in M_{N-1x1}(k)$ $1 \le i \le h$, y $Z_1 \in$
$\in M_{N-1x1}(k||t||)$ tales que $Y = A_{o1}, x_1 + \ldots + A_{oh}\, x_1^h + Z_1\, x_1^h$ con
$1 \le n_1 = V(Z_1)$ $v(x_1) = V(Y)$.

(ii) Existen

$$A_{oi} = \begin{pmatrix} a_{oi,2} \\ \vdots \\ a_{oi,N} \end{pmatrix} \in M_{N-1x1}(k), \quad 1 \le i \le \infty \quad \text{tales que}$$

$Y = \sum_{1 \le i \le \infty} A_{oi} x_1^i$.

En el caso (i) si $V(Z_1) = n$ existe en $Z_1 = \begin{pmatrix} Z_{12} \\ \vdots \\ \dot{Z}_{1N} \end{pmatrix}$ un z_{1i_1}
con $v(z_{1i_1}) = n_1$. Para simplificar denotamos este z_{1i_1} por z_1, considerando ahora las expresiones $\{z_1, x_1, z_{12}, \ldots, \hat{z}_{1i_1}, \ldots, z_{1N}\}$ y repitiendo el proceso anterior dividiendo por Z_1 obtenemos análoga mente dos casos

$$\text{(i)} \quad Z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ z_{12} \\ \hat{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{1N} \end{pmatrix} = A_{11}\, z_1 + \ldots + A_{1h_1}\, z_1^{h_1} + Z_2\, z_1^{h_1}, \quad \text{con}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij,2} \\ \vdots \\ a_{ij,N} \end{pmatrix} \in M_{N-1x1}(k) \qquad 1 \le V(Z_2) < V(Z_1)$$

$$\text{(ii)} \quad \overline{Z}_1 = \sum_{1 \le i \le \infty} A_{1i}\, z_1^i$$

llegando en un número finito de pasos a unas expresiones

$$(1) \quad \begin{cases} Y = A_{01}\, x_1 + \ldots + A_{oh}\, x_1^h + Z_1\, x_1^h \\ \overline{Z}_1 = A_{11}\, z_1 + \ldots + A_{oh_1}\, z_1^{h_1} + Z_2\, z_1^{h_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{Z}_r = \sum_{1 \le i \le \infty} A_{ri}\, z_r^i \end{cases}$$

con $V(Z_j) = v(z_j)$ $1 \leq v(z_r) < \ldots < v(z_1) < V(Y)$ $a_{1j,2} = 0$ para todo j.

Estas expresiones reciben el nombre de desarrollo de Hamburger-Noether, que denotaremos (H-N), la curva de ecuaciones paramétricas $\{x_1(t),\ldots,x_N(t)\}$.

Si $N > 2$ el desarrollo no está unívocamente determinado puesto que depende de la elección en la matriz Z_j de un elemento z_j tal que $v(z_j) = V(Z_j)$.

6.1. A un desarrollo de Hamburger-Noether de la forma anterior se le puede asociar unívocamente una matriz de N filas e infinitas columnas, asociando a la fila i-ésima de la matriz a $x_i(t)$ y definiendo dicha matriz por cajas de la forma siguiente:

$$M = (C_o \,|C_1|\, \ldots \,|C_{r-1}|\, C_r),$$

donde cada C_i, $0 \leq i < r$ tiene h_i columnas y C_r infinitas.

$$C_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ A_{o1} & A_{o2} & \cdots\cdots & A_{oh} \end{pmatrix}$$

y para $j > 0$ C_j se construye de la manera siguiente. Sea g el índice tal que en el proceso anterior el elemento seleccionado z_j se obtiene por divisiones sucesivas a partir de $x_g(t)$, entonces para todo k, $A_{jk} = \begin{pmatrix} a_{jk,2} \\ \vdots \\ a_{jk,N} \end{pmatrix}$ y llamamos $A^*_{jk} = \begin{pmatrix} a^*_{jk,1} \\ \vdots \\ a^*_{jk,N} \end{pmatrix}$ a la matriz dada por $a^*_{jk,s} = a_{jk,s-1}$ para $s < g$, $a^*_{j1,g} = 1$

$a^*_{jk,g} = 0$ para $k > 0$ y $a^*_{jk,s} = a_{jk,s}$ para todo $s > g$, y hacemos $C_j = (A^*_{j1},\ldots,A^*_{jh_j})$.

La matriz C_j' tendrá una fila de unos y ceros en la forma

$$\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
1\ 0 \dots 0 & 0 & & 1\ 0 \dots 0 & 0 \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & & & \\
 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \\
 & 1\ 0 \dots 0 & 0 \dots\dots & \dots\dots\dots & \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & 1\ 0 \dots 0
\end{array}\right) \\
\begin{array}{ccccc}
\leftarrow h \rightarrow & \leftarrow h_1 \rightarrow & \qquad\qquad & \leftarrow h_{r-1} \rightarrow & \leftarrow \infty \rightarrow
\end{array}
\end{array}$$

Dada una fila que tenga un uno seguido de ceros en la caja C_j recibirá el nombre de fila distinguida en la caja C_j, y el primer elemento de dicha fila posterior al 1 que sea distinto de cero proporciona $v(z_j)$.

7. <u>Transformaciones cuadráticas de un desarrollo de Hamburger-Noether</u>. El desarrollo de Hamburger-Noether de una curva contiene toda la información sobre las transformadas cuadráticas de la misma. En efecto, dado un desarrollo de H-N para la curva $\mathcal{O}$, un desarrollo de H-N para su transformada cuadrática $\mathcal{O}_1$ viene dado por

(i) si $h > 1$

$$\begin{cases}
Y_1 = A_{o2}\ {}_1 + \dots + A_{oh}\, x_1^{h-1} + Z_1\, x_1^{h-1} \\
\overline{Z}_1 = A_{11}\, z_1 + \dots + A_{1h_1}\, z_1^{h_1} + Z_2\, z_1^{h_1} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\overline{Z}_r = \sum\limits_{1 \le i \le \infty} A_{ri}\, z_r^i
\end{cases}$$

(ii) si $h = 1$ $\begin{cases} \bar{Z}_1 = A_{11} z_1 + \dots + A_{1h_1} z_1^{h_1} + Z_2 z_1^{h_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{Z}_r = \sum\limits_{1 \le i < \infty} A_{ri} z_r^i \end{cases}$

7.1. Por tanto, tomando una parametrización primitiva de $\mathcal{O}$ la sucesión de multiplicidades de $\mathcal{O}$ viene dada por $\overbrace{v(x_1),\dots,v(x_1)}^{h}$, $\overbrace{v(z_1),\dots,v(z_1)}^{h_1},\dots,v(z_r) = 1$, de donde los enteros $n = v(x_1)$, $n_i = v(z_i)$, h, h_i, $(i=1,\dots,r)$ dependen solamente de $\mathcal{O}$ y no del desarrollo.

7.2. Cualquier expresión del tipo (1) nos determina el desarrollo de H-N de alguna curva.

7.3. Los valores h, h_j, n, n_j del desarrollo H-N deben verificar:

(i) $n > n_1 > \dots > n_r = 1$, $h, h_j \ge 1$ $\quad 1 \le i \le r-1$

(ii) Si $n_j \nmid n_{j-1}$ entonces $h_j \le \left|\frac{n_{j-1}}{n_j}\right|$ y $n_{j+1} \le n_{j-1} - h_j n_j$

(iii) más aún si $n_{j+k} \nmid n_{j-1} - h_j n_j - \dots - h_{j+k-i} n_{j+k-1}$ $0 < k \le s$ entonces $h_{j+s} \le \left|\frac{n_{j-1} - h_j n_j - \dots - h_{j+s-1} n_{j+s-1}}{n_{j+s}}\right|$ y $n_{j+s+1} \le n_{j-1} - h_j n_j - \dots - h_{j+s} n_{j+s}$.

Dados n, n_j, h, h_j con las condiciones anteriores entonces existe una curva sobre k tal que cualquiera de sus desarrollos H-N tiene por sucesion de multiplicidades $\overbrace{n,\dots n}^{h}$, $\overbrace{n_1,\dots,n_1}^{h_1},\dots,n_r = 1$

8. Semigrupo y conductor de una curva algebroide irreducible. El conductor de $\overline{\mathcal{O}}$ en $\mathcal{O}$ se define como el ideal de $\overline{\mathcal{O}}$

$C = \{z \in \overline{\mathcal{O}} \mid z\,\overline{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}\}$ y es de la forma $C = t^c\,\overline{\mathcal{O}}$ donde c es un entero positivo, llamado orden del conductor del cierre íntegro de la curva.

Llamaremos semigrupo de valores de la curva $\mathcal{O}$ al subsemigrupo de $\mathbb{N}$ imagen de la valoración v de la curva y lo denotaremos por $S(\mathcal{O}) = v(\mathcal{O} - \{0\})$.

8-1. El orden del conductor es el menor entero de $S(\mathcal{O})$ tal que todos los elementos de $\mathbb{N}$ mayores que él están en $S(\mathcal{O})$.

8-2. Se dice que $\mathcal{O}$ es una curva de Arf |3| si tiene un semigrupo de la forma $S(\mathcal{O}) = \{n,\ n+n_1, \ldots, n+n_1 + \ldots + n_s,\ n + \ldots + n_s + \mathbb{N}\}$ donde $E(\mathcal{O}) = (n, n_1 \ldots n_s, 1)$ es sucesión de multiplicidades de $\mathcal{O}$. En este caso el conductor de $\mathcal{O}$ es $c = n + n_1 + \ldots + n_s + 1$.

8.3. Se llama cierre de Arf de una curva $\mathcal{O}$ al máximo anillo $\mathcal{O}^* \subset \overline{\mathcal{O}}$ que contiene a $\mathcal{O}$ tal que:

(i) $E(\mathcal{O}) = E(\mathcal{O}^*)$

(ii) $\mathcal{O}^*$ es un anillo de Arf y es el mínimo anillo de una curva de Arf que cumple (i), |18|.

Como $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}^*$, $S(\mathcal{O}) \subset S(\mathcal{O}^*)$ y $c(\mathcal{O}) \geq c(\mathcal{O}^*) = n + n_1 + \ldots + n_s + 1$ nos da una cota inferior del conductor para un desarrollo de H-N con sucesión de multiplicidades $n, n_1, \ldots, n_s, 1$.

CAPITULO I

DEFORMACIONES DE CURVAS

En este capítulo estudiamos las familias de curvas con el nombre usual de deformaciones, con la distinción entre deformaciones de una curva algebroide irreducible con espacio de parámetros y un anillo A, y deformaciones de una parametrización sobre A. Consideramos tambié un tipo especial de deformaciones, las de un desarrollo de Hamburger-Noether (0-6) que será usada en los últimos capítulos para dar una definición de deformación equisingular.

Hacemos también un estudio de las fibras específica y genérica del morfismo de la deformación así como de las curvas que representan haciendo especial mención del caso en que la característica del cuerpo base sea distinta de cero por los problemas que presenta.

Por último asociamos a la deformación de una parametrización un semigrupo de valores análogo al de curvas, demostrando que, en el caso en que tenga complementario finito en $\mathbb{N}$, existe en cierto sentido un conductor analogamente al caso de curvas.

1. DEFORMACIONES DE UNA CURVA

Esta sección está dedicada a introducir el concepto de deformación de una curva en una categoría de anillos.

Definición 1.1. Sea $\mathcal{A}$ una categoría de anillos. Dados una curva algebroide (irreducible) X_o y un anillo $A \in Ob(\mathcal{A})$, llamaremos A-deformación de X_o sobre A a todo esquema X tal que

$$\begin{tikzcd} X_o \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\ k \arrow[r] & \mathrm{Spec}\ A \end{tikzcd} \quad \text{es decir,} \quad X_o \approx X \times_{\mathrm{Spec}\ A} \mathrm{Spec}\ k$$

o lo que es lo mismo, X_o es la fibra de X sobre el punto cerrado imagen de Spec k en Spec A.

Si $X = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}$ y $X_o = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_o$ llamaremos indistintamente deformación a X y $\mathcal{O}$. Por dualidad la deformación $\mathcal{O}$ queda determinada por verificarse en $\mathcal{A}$ la condición siguiente

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_o \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{O} \arrow[l] \\ k \arrow[u] & A \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd} \quad \text{es decir} \quad \mathcal{O}_o \approx \mathcal{O} \otimes_A k \quad \text{siendo } \otimes_A \text{ el}$$

producto tensorial en $\mathcal{A}$. Al ser $\mathcal{O}_o$ irreducible la condición $\mathcal{O}_o \approx \mathcal{O} \otimes_A k$ nos dice que la fibra del morfismo en el origen es reducida.

A ó Spec A reciben el nombre de espacio de parámetros de la deformación. En lo sucesivo escribiremos $|X, X_o, \mathrm{Spec}\ A|$ ó $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A|$ para designar a una deformación de X_o sobre A.

Hay autores que llaman deformación de X_o con espacio de parámetros Spec A a una terna $|X, X_o, \text{Spec } A|$ tal que
$X_o \approx \text{red } (X \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } k)$.

En lo sucesivo supondremos fijada la categoría $\mathcal{A}$ y al hablar de homomorfismos ó de anillos se entenderá que se trata de objetos y morfismos de esta categoría.

1.1.1. Diremos que la deformación $|X, X_o, \text{Spec } A|$ es <u>plana</u> si el morfismo X Spec (A) es plano, ó lo que es igual, si $\mathcal{O}$ es una A-álgebra plana.

1.1.2 Dada una curva algebroide irreducible X_o, dos deformaciones $|X_1, X_o, \text{Spec } A|$, $|X_2, X_o, \text{Spec } A|$ se llaman <u>equivalentes</u> si existe un A-isomorfismo entre X_1, X_2 que induce la identidad sobre X_o.

<u>Nota 1.2.</u>

1.2.1 Dados $|X, X_o, \text{Spec } A|$ y un homomorfismo $\phi : A \to B$ podemos definir por cambio de base la deformación $|X', X_o, \text{Spec } B|$ con
$X' \approx \text{Spec } (\mathcal{O} \otimes_A B)$.

1.2.2 Si $Y = \text{Spec } (\mathcal{O}')$ es una deformación de X_o sobre una A-álgebra B llamaremos <u>morfismo de deformaciones</u> $\psi : X \to Y$, a todo morfismo que haga el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X_o \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & Y \arrow[dd] \\
 & X \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dd] & \\
\text{Spec } k \arrow[rr] \arrow[dr] & & \text{Spec } B \arrow[dl, "\phi"] \\
 & \text{Spec } A &
\end{tikzcd}$$

donde ϕ es el morfismo estructural de B como A-álgebra.

Existe una correspondencia biunívoca entre los morfismos de deformaciones y las deformaciones dadas por $\mathcal{O}' \simeq \mathcal{O} \otimes_A B$.

Nota 1.3

1.3.1 En lo que sigue denotaremos por C la categoría cuyos objetos tienen a k como cuerpo de coeficientes, y cuyos morfismos son los de k-álgebras locales; y por $\hat{C}$ la categoría de k-álgebras noetherianos, locales, completas, con k como cuerpo de coeficientes, y cuyos morfismos son los de k-álgebras locales. C es una subcategoría completa de $\hat{C}$. Si $A \in \hat{C}$ y m_A es el ideal maximal de A, para cada $m \in N$ se tiene que $\frac{A}{m_A^n} \in C$.

1.3.2 Si $A \in \hat{C}$ consideraremos salvo mención expresa, deformaciones irreducibles definidas del siguiente modo. Si $\mathcal{O}_o = \frac{k||\underline{X}||}{X}$ una deformación $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A|$ viene dada por $\mathcal{O}$ k-álgebra local, dominio de integridad, $\mathcal{O} \approx \frac{A||\underline{X}||}{I}$ donde I es ideal de $A||\underline{X}||$ tal que $\frac{I}{m_A\mathcal{O}} \simeq I_o$, y $I \cap A = (0)$.

De esto se deduce que la altura $hgt(I) = N-1$, ya que por ser $\mathcal{O}$ y $A||\underline{X}||$ k-álgebras finitamente generadas se verifica $\dim \mathcal{O} + hgt\ (I) = \dim A+N$, y $\dim \frac{\mathcal{O}}{m_A\mathcal{O}} = \dim \mathcal{O} - hgt\ (m_A\mathcal{O}) = \dim \mathcal{O}_o$ siendo $\frac{\mathcal{O}}{m_A\mathcal{O}} \simeq \mathcal{O}_o$.

1.3.3 En la situación de 1.3.2 si A es cohen-Macaulay, el que $\mathcal{O}$ sea A-plano equivale a que $\mathcal{O}$ sea Cohen-Macaulay.

En efecto, sean $\{u_1,\dots,u_r\}$ una sucesión regular para A y

$x \in \mathcal{O}$ con $x \notin m_A\mathcal{O}$. El hecho de que $u_1,\dots,u_r$, x formen una sucesión regular para $\mathcal{O}$ equivale a que x no sea divisor de cero en $\frac{\mathcal{O}}{m_A\mathcal{O}} \simeq \mathcal{O}_o$, es decir sea parámetro de $\mathcal{O}_o$, y que x no sea divisor de cero en $\frac{\mathcal{O}}{m_A\mathcal{O}}$ de dimensión 1 es a su vez equivalente a que $\mathcal{O}$ sea A-plano.

<u>Definición 1.4</u>. Si $A \in C$, diremos que $|X_o, X, \operatorname{Spec} A|$ es <u>infinitesimal</u> |25| si es plana y si $i : X_o \longrightarrow X$ es una inmersión cerrada, i.e. X_o es un subesquema cerrado de X.

<u>Notas 1.5.</u>

1.5.1 Como $\mathcal{O}_o \simeq \frac{\mathcal{O}}{m_A\mathcal{O}}$, a la vista de 1.3.3 la platitud lleva consigo que la deformación sea infinitesimal.

1.5.2 Dos deformaciones infinitesimales $|X_1, X_o, A|$, $|X_2, X_o, A|$ son equivalentes si y sólo si existe un morfismo

$$\phi : X_1 \longrightarrow X_2 \quad \text{que induzca la identidad en } X_o$$

En efecto, ϕ proviene de un A-morfismo $\phi' : \mathcal{O}_2 \longrightarrow \mathcal{O}_1$ que induce un isomorfismo $\frac{\mathcal{O}_2}{m_A\mathcal{O}_2} \simeq \frac{\mathcal{O}_1}{m_A\mathcal{O}_1}$ y como m_A es nilpotente y $\mathcal{O}_1$ A-plano, ϕ' es isomorfismo (|25| lema 3.3).

2. DEFORMACIONES DE UNA PARAMETRIZACION

En la sección anterior hemos definido la deformación de una curva con un carácter general, buscando el que una deformación de una curva se pueda interpretar como una familia de curvas que varían continuamente. Aquí vamos a introducir la noción de deformación de una parametrización, es decir consideraremos la deformación como una variedad parametrizable, tal que para un valor concreto del parámetro se obtiene la curva dada.

La existencia de una parametrización para una deformación plana dada no siempre está garantizada. En el caso analítico, Teissier |27| da condiciones para su existencia siempre que el espacio de parámetros de la deformación sea liso y de dimensión 1, y Raynaud |28| lo hace si el espacio de parámetros es normal y de cualquier dimensión. En ambos casos, los autores citados prueban que dicha existencia es equivalente a la constancia de un invariante numérico de la curva, el invariante habitualmente representado por δ.

Definición 2.1. Dada una parametrización primitiva $\chi = \{\phi_1(t),\ldots$ $\ldots, \phi_N(t)\}$ (0-3) de una curva irreducible $\mathcal{O}_o$, diremos que $\Phi = \{\Phi_1,\ldots,\Phi_N\}$ con $\Phi_i \in A||t||$, $A \in \hat{\mathcal{C}}$ es una deformación de la parametrización χ si $\operatorname{res} \Phi_i = \Phi_i + m_A A||t|| = \phi_i(t)$ y escribiremos $|\Phi, \chi, A|$ para designar dicha deformación.

Diremos que una deformación $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A|$, con $\mathcal{O}$ irreducible (es decir $\mathcal{O}$ dominio de integridad) y $A \in \hat{\mathcal{C}}$ dominio de integridad admite una parametrización si existe una deformación de una parametrización de $\mathcal{O}_o$, $|\Phi, \chi, A|$ tal que para el homomorfismo Φ de

$A||\underline{X}||$ en $A||t||$ definido por $\Phi(X_i) = \Phi_i$ para cada $i=1,\ldots,N$ se verifica que $\mathcal{O} \approx \dfrac{A||\underline{X}||}{(\ker\Phi)}$.

<u>Nota 2.2.</u>

La parametrización χ de $\mathcal{O}_o$ no es sino un morfismo

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathcal{O}}_o \approx k||t|| & \\
\mathcal{O}_o \arrow[u] & k||\underline{X}|| \arrow[l] \arrow[ul, "\chi"']
\end{tikzcd}$$

Entonces se puede asociar a la deformación $|\Phi, \chi, A|$ un morfismo Φ de $A||\underline{X}||$ en $A||t||$, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \hat{\otimes}_k k||\underline{X}|| \arrow[r, "\Phi"] & A \hat{\otimes}_k \overline{\mathcal{O}}_o \approx A||t|| \arrow[d] \\
k||\underline{X}|| \arrow[u] \arrow[r, "\chi"] & k||t||
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Si llamamos $\mathcal{O} \approx \dfrac{A||\underline{X}||}{(\ker\phi)}$ y $\mathcal{O}_o$ a la curva correspondiente a χ, llamaremos a la terna $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A|$ <u>deformación asociada</u> a $|\Phi, \chi, A|$.

En general $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A|$ no es una deformación en el sentido definido en la sección 1 puesto que $\mathcal{O}_o$ no tiene porqué ser isomorfo a $\dfrac{\mathcal{O}}{m_A\mathcal{O}}$, ya que este último anillo puede no ser reducido, como prueba el ejemplo siguiente:

Consideremos la deformación $|\Phi, \chi, A|$ con $\Phi = \{\Phi_1 = t^4,\ \Phi_2 = t^5,\ \Phi_3 = u\, t^7\}$, $\chi = \{\phi_1 = t^4,\ \phi_2 = t^5,\ \phi_3 = 0\}$ y $A = k||u||$.

Definimos $\Phi : A||X_1, X_2, X_3|| \longrightarrow A||t||$ como $\Phi(X_i) = \phi_i$, entonces la deformación asociada es $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A|$ con

$$\mathcal{O} = \frac{A||X_1, X_2, X_3||}{(\ker \Phi)}, \qquad \mathcal{O}_o \approx \frac{k||X_1, X_2, X_3||}{(X_1^5 - X_2^4, X_3)}$$

y sin embargo $\mathcal{O}_o \not\approx \frac{\mathcal{O}}{m_A \mathcal{O}}$ ya que $m_A = u.\mathcal{O}$ y $X_3 \notin \frac{(\ker \Phi)}{u . \mathcal{O}}$. Además se puede ver que $\frac{\mathcal{O}}{m_A \mathcal{O}}$ no es reducido pues existen elementos nilpotentes, por ejemplo X_3 ya que $X_3^2 \in \frac{(\ker \Phi)}{u . \mathcal{O}}$ pues $u^2 X_1 X_2^3 - X_3^2 \in (\ker \Phi)$.

<u>Definición 2.3</u>. Dos deformaciones de una parametrización $|\Phi, \chi, A|$ $|\Phi', \chi, A|$ <u>se dicen asociadas</u> si se puede obtener una de la otra por una substitución en $A||t||$ del tipo $t \to a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$, con $a_i \in A$ y a_1 unidad.

Diremos $|\Phi, \chi, A|$, $|\Phi', \chi, A|$ son equivalentes si sus deformaciones asociadas lo son (1.1.2).

<u>Nota 1.4</u>.

Una deformación de la parametrización no tiene en general una deformación asociada plana. Si la deformación es de una curva plana y $N = 2$ entonces la deformación asociada lo es como puede verse en |10|, |22| ya que en dicho caso $(\ker \Phi)$ es principal.

3. DESARROLLOS DE HAMBURGER NOETHER SOBRE ANILLOS

Para trabajar con mayor generalidad y, donde sea posible, con independencia de la característica del cuerpo base, pasamos a realizar un estudio de deformaciones de un tipo particular de parametrizaciones, las de Hamburger-Noether.

Definición 3.1. Un desarrollo de Hamburger-Noether D sobre un anillo A es un conjunto de expresiones:

$$(D)\quad \begin{cases} Y = A_{o1}\, x_1 + \ldots + A_{oh}\, x_1^h + Z_1\, x_1^h \\ \overline{Z}_1 = A_{11}\, z_1 + \ldots + A_{1h_1}\, z_1^{h_1} + Z_2\, z_1^{h_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{Z}_r = \sum\limits_{1\le i\le\infty} A_{ri}\, z_r^i \end{cases}$$

donde,

(1) $h, h_1, \ldots, h_{r-1}$ son enteros ≥ 1, x_1, $z_i \in k||t||$;

(2) A_{ij} son matrices $(N-1)\mathrm{x}1$ con coeficientes en A;

(3) Z_i, $\overline{Z}_i$ son matrices $(N-1)\mathrm{x}1$ con coeficientes en $A||t||$;

(4) Si llamamos matriz asociada al desarrollo a una matriz construida por cajas $(C_o \,|\, \ldots \,|\, C_r)$ siguiendo el proceso de (0-6.2),

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 1\ 0\ \ldots\ 0 & 0 & & & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & 1\ 0\ 0\ \ldots & 0 \\ & 1\ 0\ \ldots\ 0 & 0\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & & & & 1\ 0\ \ldots \\ \longleftarrow h \longrightarrow & \longleftarrow h_1 \longrightarrow & & \longleftarrow h_{r-1} \longrightarrow & \leftarrow \infty \rightarrow \end{array}\right),$$

esta matriz verifica que en toda caja C_i si la fila j es la distinguida, el primer elemento en dicha fila después del 1 que sea distinto de cero α_{jk}, es unidad en A, y (5) dichos elementos $\alpha_{1k_o}, \alpha_{i_1k_1}, \ldots, \alpha_{i_rk_r}$ son tales que:

(i) $k_r = \infty$

(ii) si llamamos $n_{r-1} = k_{r-1} - (h + h_1 + \ldots + h_{r-1})$

$$n_{r-2} = \begin{cases} = k_{r-2} - (h + \ldots + h_{r-2}) + h_{r-1}\, n_{r-1} \\ \qquad\qquad \text{si } \alpha_{i_{r-2}\, k_{r-2}} \in C_r \\ = (k_{r-2} - (h + \ldots + h_{r-2}))n_{r-1} \\ \qquad\qquad \text{si } \alpha_{i_{r-2}\, k_{r-2}} \in C_{r-1} \end{cases}$$

$$n_j = h_{j+1}\, n_{j+1} + \ldots + h_{j+g}\, n_{j+g} + (k_j - (h + \ldots + h_{j+g}))n_{j+g+1} \quad \text{si} \quad \alpha_{i_jk_j} \in C_{j+g+1}$$

$$n = h_1 n_1 + \ldots + h_g\, n_g + (k_o (h + \ldots + h_g))n_{g+1} \quad \text{si} \quad \alpha_{1k_o} \in C_{g+1}$$

$\{n, n_1, \ldots, n_{r-1}, 1\}$ verifican las propiedades (0.7.3) correspondientes a las de una sucesión de multiplicidades de una curva plana.

Proposición 3.2. Un desarrollo de Hamburger-Noether sobre un dominio de integridad noetheriano A como el anterior lleva asociado un morfismo $\Phi : A||\underline{X}|| \longrightarrow A||t||$ cuyo núcleo es de altura N-1.

Demostración.

Construimos $\Phi(X_i) \in A||t||$ en la forma siguiente: si llamamos $t = z_r$, por sustituciones sucesivas de la segunda ecuación de (D)

$x_1 = \Phi_1(t)$ y de la primera $x_i = \Phi_i(t)$ $i=2,\ldots,N$ ponemos $\Phi(X_i) = \Phi_i(t)$.

Sean $\overline{K}$ el cierre algebraico del cuerpo de fracciones K de A y $\Phi' : \overline{K}||\underline{X}|| \longrightarrow \overline{K}||t||$ el morfismo inducido por Φ. Φ' define una curva algebroide irreducible sobre $\overline{K}$ ya que corresponde al desarrollo de H-N dado por $\{Y,\overline{Z}_1,\ldots,\overline{Z}_r\}$, luego $(\ker \Phi')$ tiene altura $N-1$. La composición $A \to K \to \overline{K}$ es plana por ser K el cuerpo de fracciones de A, luego tensorizando por $\overline{K}$ la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow (\ker \Phi) \longrightarrow A||\underline{X}|| \xrightarrow{\Phi} A||t||,$$

obtenemos $$0 \longrightarrow (\ker \Phi) \otimes_A \overline{K} \longrightarrow A||\underline{X}|| \otimes_A \overline{K} \xrightarrow{\Phi\otimes 1} A||t|| \otimes_A \overline{K}$$

Completamos respecto del ideal maximal m de $A||\underline{X}||$, es decir respecto de $m \otimes_A \overline{K}$, y como la parametrización es tal que $\Phi(X_1) = x_1(t) = a_n t^n + \ldots$ con a_n unidad en A, el ideal maximal m_1 de $A||t||$ cumple $m_1^n \subset \Phi(m)$, con lo que la complección por $\Phi(m) \otimes_A \overline{K}$ coincide con la de $m_1 \otimes_A \overline{K}$. Por tanto tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (\ker \Phi) \hat{\otimes}_A \overline{K} \longrightarrow \overline{A}||\underline{X}|| \xrightarrow{\Phi'} \overline{K}||t||$$

y así $(\ker \Phi') \approx (\ker \Phi) \hat{\otimes}_A \overline{K}$. (1)

$A||\underline{X}||$ es A-plano, $\overline{K}$ es A-plano, luego por cambio de base, $A||\underline{X}|| \otimes_A \overline{K}$ es $A||\underline{X}||$ plano y por complección respecto del ideal maximal obtenemos que $\overline{K}||\underline{X}||$ es $A||\underline{X}||$ plano y por ser locales es también fielmente plano. Por tanto $(\ker \Phi) \otimes_{A||\underline{X}||} \overline{K}||\underline{X}|| \approx$
$\approx (\ker \Phi) \overline{K}||\underline{X}||$. (2).

El homomorfismo $(\ker \Phi) \otimes_A \overline{K} \hookrightarrow (\ker\Phi) \otimes_{A||\underline{X}||} \overline{K}||\underline{X}||$ es inyectivo, luego de $(\ker \Phi') \simeq (\ker \Phi) \otimes_A \overline{K} \hookrightarrow (\ker \Phi) \overline{K}||\underline{X}||$ también lo es y así $(\ker \Phi') \hookrightarrow (\ker \Phi) \overline{K}||\underline{X}||$ y de lo anterior deducimos trivialmente que $(\ker \Phi) \overline{K}||\underline{X}|| \hookrightarrow (\ker \Phi')$ obteniendo el isomorfismo $(\ker \Phi) \overline{K}||\underline{X}|| \approx (\ker \Phi')$.

Por tanto al ser $\overline{K}||\underline{X}||$, $A||\underline{X}||$-fielmente plano. (|20|13.B) se sigue $\operatorname{hgt}((\ker \Phi) \overline{K}||\underline{X}||) = \operatorname{hgt}(\ker \Phi) = \operatorname{hgt}(\ker \Phi') = N-1$.

Como consecuencia en el caso en que $A \in \hat{C}$ y sea dominio de integridad obtenemos:

<u>Corolario 3.3</u>. Sean $A \in \hat{C}$ dominio de integridad, D un desarrollo de Hamburger-Noether sobre A, entonces la parametrización dada por $D, \Phi = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_N\}$ induce una deformación $|\Phi, \operatorname{res} \Phi, A|$ de la parametrización $\{\operatorname{res} \Phi_1, \ldots, \operatorname{res} \Phi_N\}$ de una curva algebroide irreducible $\mathcal{O}_o$ sobre k a la que llamaremos <u>deformación asociada</u> a D.

<u>Corolario 3.4</u>. En las hipótesis anteriores se verifica que la sucesión de multiplicidades de $\mathcal{O}_o$ coincide con la sucesión de multiplicidades de la curva definida por la parametrización Φ extendida a $\overline{K}||t||$ con $\overline{K}$ cierre algebriaco del cuerpo de fracciones de A.

<u>Demostración</u>.

Es evidente ya que según definición 3.1 $\alpha_{1k_o}, \ldots, \alpha_{i_r k_r}$ son unidades en A.

<u>Notas 3.5</u>.

3.5.1. $A \in \hat{C}$, dominio de integridad diremos que <u>dos desarrollos de</u>

Hamburger-Noether sobre A son equivalentes si sus deformaciones de la parametrización asociadas son equivalentes o asociadas (2.3).

3.5.2. Dado un desarrollo de H-N, D, sobre $A \in \hat{C}$, llamaremos deformación asociada a D, a la deformación asociada a la deformación de la parametrización $|\Phi, \text{res } \Phi, A|$ del corolario 3.3.

3.5.3. Diremos que una deformación $|\Phi, \chi, A|$ admite un desarrollo de H-N si existe un desarrollo de H-N sobre A, D, tal que $|\Phi, \chi, A|$ es la deformación asociada a D según hemos visto en corolario 3.3.

Diremos que una deformación $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A|$ admite un desarrollo de H-N, si existe un desarrollo de H-N sobre A, D, tal que $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A|$ es la deformación asociada a $|\Phi, \chi, A|$, deformación de una parametrización asociada a D.

4. CURVAS GENERICA Y ESPECIFICA

Las nociones de curva genérica y específica de una familia de curvas analíticas complejas tienen una traslación natural a las deformaciones de curvas algebroides. El concepto de fibra específica es de traslación inmediata y el único problema se presenta al pretender trasladar la noción de fibra genérica, puesto que no contamos sino a un punto cerrado. Para resolver este problema sustituimos el hecho de tomar la fibra en un punto perteneciente a un subespacio y próximo al punto de partida, por la localización en el punto genérico del subespacio, lo cual lleva consigo la necesidad de cambiar el cuerpo base extendiendolo al cuerpo de funciones racionales en el subespacio considerado. Este proceso produce problema en el caso de un cuerpo de característica arbitraria como veremos a continuación.

Dada una deformación irreducible $|X, X_o, \text{Spec } A|$ con $A \in \hat{\mathcal{C}}$ dominio de integridad llamaremos A-sección a todo morfismo $s : \text{Spec } A \longrightarrow X$ tal que su composición con el morfismo $C : X \longrightarrow \text{Spec } A$ dado por la deformación sea la identidad en Spec A.

Si $X = \text{Spec } \mathcal{O}$, $X_o = \text{Spec } \mathcal{O}_o$, con $\mathcal{O}$ dominio de integridad una sección viene dada por un homomorfismo $s : \mathcal{O} \longrightarrow A$ tal que su composición con el dual de ϕ es la identidad. En lo sucesivo cuando consideremos deformaciones con una sección s, escribiremos $|X, X_o, \text{Spec } A, s|$ ó $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$.

Una sección queda unívocamente determinada por el núcleo del homomorfismo s es decir por un ideal primo p de $\mathcal{O}$ que verifica $p \cap A = (0)$.

La sección s induce el homomorfismo $\mathcal{O}_o \to k$ cuyo núcleo es el ideal maximal $m_o = (X_1,\dots,X_n)k||\underline{X}||/I_o$ por tanto podemos suponer que p es de la forma $(X_1 - m_1,\dots,X_N - m_N)A||\underline{X}||/I$. Si la sección viene dada por el ideal $(X_1,\dots,X_N)A||\underline{X}||/I$ la llamaremos <u>sección trivial</u>.

Dada la deformación $|X, X_o, A|$ con $A \in \hat{C}$ dominio de integridad consideremos las fibras del morfismo $\pi : X \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ en los puntos m_A, (o) de Spec A. Dichas fibras vienen definidas como sigue:

(i) La fibra m_A es $\operatorname{Spec} (\mathcal{O} \otimes_A k(m_A))$, y puesto que $k(m_A) = k$ se sigue que la fibra en dicho punto es la curva $\operatorname{Spec} (\mathcal{O} \otimes_A k) \approx \approx \operatorname{Spec} \mathcal{O}_o \approx X_o$ que recibe el nombre de fibra o curva específica.

(ii) La fibra en (o) es $\operatorname{Spec} (\mathcal{O} \otimes_A k((o)))$, donde $k((o)) \approx \approx A((o))$ cuerpo de fracciones de A. Dicha fibra recibe el nombre de fibra genérica y en general no es una curva.

Si la deformación admite secciones la fibra genérica nos determina en ciertos casos una curva para cada sección, como veremos a continuación.

<u>Definición 4.1</u>. Sea $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ una deformación con sección, si es el ideal que define s llamaremos <u>fibra genérica en la sección</u> s a $(\mathcal{O} \otimes_A k((o)))_{p^*}$ con $p^* = p(\mathcal{O} \otimes_A k((o)))$.

Se tiene que,

(1) $(\mathcal{O} \otimes_A k((o)))_{p^*} \approx \mathcal{O}_p$. En efecto:

Tenemos $(\mathcal{O} \otimes_A k((o)))_{p^*} \simeq \mathcal{O}\, p \otimes_A k((o))$ (13.A |20|) y como $\frac{\mathcal{O}}{p} \simeq A$ se sigue que es $k(p) \simeq k((o))$ y de aquí se sigue (1).

Nota 4.2 La fibra genérica de $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$, $\mathcal{O}_p$ es de dimensión 1 ya que como $\frac{\mathcal{O}}{p} \simeq A$, hgt (p) = dim $\mathcal{O}$ - dim A = 1 (1,3.2). Sin embargo $\mathcal{O}_p$ no es una curva en el sentido de la definición del capítulo 0. Abhyankar en | 2 | define como <u>cuasicurva</u> a un anillo local equicaracterístico de dimensión de Krull 1 y que contiene algún no divisor de cero con lo que según esta definición $\mathcal{O}_p$ es una cuasicurva.

Para poder considerar esta cuasicurva $\mathcal{O}_p$ como una curva, precisamos extender su cuerpo de coeficientes $k(p)$ a su cierre algebraico. Sea $\overline{k(p)}$ el cierre algebraico de $k(p)$, y $(\mathcal{O}_p)^\wedge$ el completado de $\mathcal{O}_p$ respecto de su ideal maximal $p\mathcal{O}_p$, entonces llamaremos a $\mathcal{O}_u$ = Spec $((\mathcal{O}_p)^\wedge \hat{\otimes}_{k(p)} \overline{k(p)})$ <u>curva genérica de $\mathcal{O}$ relativa a la sección s</u> en el caso en que no contenga elementos nilpotentes.

El anillo $\mathcal{O}_u$ es local, noetheriano, de dimensión de Krull 1, y con cuerpo de coeficientes $\overline{k(p)}$ algebraicamente cerrado, si además es reducido, entonces es el anillo de una <u>curva algebroide</u> no necesariamente irreducible pues $\mathcal{O}_u$ no tiene por que ser dominio de integridad.

El anillo $(\mathcal{O}_p)^\wedge \hat{\otimes}_{k(p)} \overline{k(p)}$ no es necesariamente reducido como se ve en el ejemplo siguiente, dado por Abhyankar en | 2 |.

Sea $\mathcal{O} \approx \dfrac{A||X_1,X_2||}{(X_2^p + u\, X_1^p)}$ con $A = k||u||$ y k de característica p, sea $p = (X_1,X_2)\mathcal{O}$ entonces $(\mathcal{O}_p)^\wedge = \dfrac{k((u))||X_1,X_2||}{(X_2^p + u\, X_1^p)}$ con $k((u))$ cuerpo de fracciones de $k||u||$.

Sea $\overline{k((u))}$ el cierre algebraico de $k((u))$, entonces existe un $u_o \in \overline{k((u))}$ con $u_o^p = u$ de donde $(\mathcal{O}_p)^\wedge \hat{\otimes}_{k((u))} \overline{k((u))} \approx$ $\dfrac{\overline{k((u))}[[X_1, X_2]]}{(X_2 + u\, X_1)^p}$ tiene elementos nilpotentes aunque claramente $\mathcal{O}_p$ es reducido.

El ejemplo anterior no es del todo significativo dado que la fibra específica en este caso es X_2^p con lo cual tampoco es reducida, como hemos exigido en la definición de deformación.

Podemos asegurar que $\mathcal{O}_u$ es una curva en los siguientes casos:

a) <u>k es de característica 0</u>. En efecto

<u>Proposición 4.3.</u> Sean B anillo local completo reducido, K su cuerpo de coeficientes de característica $c(K) = 0$ y $\overline{K}$ el cierre algebraico de K, entonces $B \hat{\otimes}_K \overline{K}$ es reducido.

<u>Demostración</u>.

$B \hat{\otimes}_K \overline{K}$ es anillo local de ideal maximal $m(B \hat{\otimes}_K \overline{K})$ con m maximal de B. En efecto:

$$\frac{B \hat{\otimes}_K \overline{K}}{m(B \hat{\otimes}_K \overline{K})} \approx \frac{B}{m} \otimes_K \overline{K} \approx \overline{K}$$

El homomorfismo $B \to B \hat{\otimes}_K \overline{K}$ es local y plano (E.G.A., IV. 7.5.5).

Para ver que $B \hat{\otimes}_K \overline{K}$ es reducido vamos a ver que la demostración de la proposición (E.G.A. IV, 7.5.6) es aplicable en nuestro caso. Para ello precisamos comprobar los puntos indicados a continuación, de los cuales no detallamos las notaciones por no hacer más lar ga la demostración

(i) Spec $B \hat{\otimes}_K \overline{B} \longrightarrow$ Spec B es un P-morfismo. En efecto vamos a aplicar el teorema (E.G.A. IV, 7.5.1).

(i-1) El homomorfismo $B \longrightarrow B \hat{\otimes}_K \overline{K}$ es local y plano

(i-2) Se verifican las condiciones R_{III}, R_{IV} (E.G.A., 7.5.3)

(i-3) Se verifica $P((B \hat{\otimes}_K \overline{K}) \otimes_B K, K)$ ya que, $B \hat{\otimes}_K \overline{K} \otimes_B K \approx$

$\approx (B \hat{\otimes}_K \overline{K}) \otimes_B \frac{B}{m} \approx \dfrac{B \hat{\otimes}_K \overline{K}}{\underline{m}(B \hat{\otimes}_K \overline{K})} \otimes_B B \approx \overline{K}$ y para toda extensión finita $K \longrightarrow K'$ $k' \otimes_K \overline{K}$ es una suma directa de cuerpos siendo cada uno de ellos reducido.

Por último aunque $\overline{K}$ no es extensión finita de K por ser $c(K) = 0$ existe resolución de singularidades dada por Hironaka |15| y entonces según (E.G.A. IV, 7.5.4.i), el teorema 7.5.1 se verifica

(ii) Como R(*) verifica R'_I (E.G.A. IV, 7.3.11) y B es reducido, $B \hat{\otimes}_K \overline{K}$ lo es también.

Como consecuencia tenemos el resultado buscado para la curva genérica.

<u>Corolario 4.4</u>. Dada la deformación $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A|$ en las hipótesis precedentes, si $c(k) = 0$ entonces $(\mathcal{O}_p)^\wedge \hat{\otimes}_{k(p)} \overline{k(p)}$ es reducido.

<u>Demostración</u>. Vamos a ver que se verifican las hipótesis de la proposición anterior.

(i) $k(p)$ es cuerpo de coeficientes de $(\mathcal{O}_p)^\wedge$ ya que,

$$k(p) \approx \frac{\mathcal{O}_p}{p\mathcal{O}_p} \approx \left(\frac{\mathcal{O}_p}{p\mathcal{O}_p}\right)^\wedge \approx \frac{(\mathcal{O}_p)^\wedge}{p(\mathcal{O}_p)^\wedge}.$$

(ii) $(\mathcal{O}_p)^\wedge$ es reducido por serlo $\mathcal{O}_p$ y ser excelente (E.G.A. IV, 7.8.3) luego de (i) y (ii) se sigue el resultado pedido.

Corolario 4.5. En las hipótesis del corolario anterior $\mathcal{O}_u = (\mathcal{O}_p)^\wedge \otimes_{k(p)} \overline{k(p)}$ es una curva de multiplicidad igual a la del anillo $\mathcal{O}_p$.

Demostración. $(\mathcal{O}_p)^\wedge \hat{\otimes}_{k(p)} \overline{k(p)}$ es una $(\mathcal{O}_p)^\wedge$ álgebra de Cohen (|19|, 2.4), luego su dimensión y multiplicidad son la misma que las de $(\mathcal{O}_p)^\wedge$ (|16| pág 113), siendo $\dim \hat{\mathcal{O}}_p = \dim \mathcal{O}_p = 1$ (|20| pág 175) y $e(\hat{\mathcal{O}}_p) = e(\mathcal{O}_p)$ (|34| pág. 285).

En principio la curva genérica en una sección s depende del cuerpo $k(p)$ que está determinado por la deformación, es decir por el morfismo $\operatorname{Spec} \mathcal{O} \longrightarrow \operatorname{Spec} A$, esto es de la manera de sumergir A en $\mathcal{O}$. Sin embargo si la caracteristica del cuerpo base k es cero la curva genérica en una sección s depende solo de la sección considerada solo como subvariedad de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}$ como demuestra el siguiente

Corolario 4.6. En las hipótesis anteriores $\mathcal{O}_u = (\mathcal{O}_p)^\wedge \hat{\otimes}_{k(p)} \overline{k(p)}$ no depende del cuerpo de coeficientes $k(p)$ elegido en $(\mathcal{O}_p)^\wedge$.

Demostración. Hemos visto que $(\mathcal{O}_p)^\wedge \hat{\otimes}_{k(p)} \overline{k(p)}$ es una $(\mathcal{O}_p)^\wedge$-álgebra de Cohen, consideramos en las hipótesis del teorema (E.G.A. IV 19.7.2), $J = (p\,\mathcal{O}_p)^\wedge$ y $B_o = \overline{k(p)}$. Si tomamos otro cuerpo de coeficientes $K' \approx k(p)$ entonces el teorema nos dice que si $\overline{K}'$ es el cierre algebraico de K' entonces $(\mathcal{O}_p)^\wedge \hat{\otimes}_{K'} \overline{K}'$ y $(\mathcal{O}_p)^\wedge \hat{\otimes}_{k(p)} \overline{k(p)}$ son $k(p)$-isomorfos.

Si la característica del cuerpo base es distinta de cero no se verifica el corolario anterior como prueba el siguiente ejemplo dado por Abhyankar en | 2 |.

<u>Ejemplo</u>: Sea $\mathcal{O} \approx \dfrac{k||u,\ X_1,X_2||}{(X_2^p + u\ X_1^p)}$ con $\Lambda = k||u||$ y $c(k) = p \neq 0$, haciendo el cambio $u_i = u - X_2^i$ $1 \leq i < p$ si consideramos la sección dada por $\mathfrak{p} = (X_1,X_2)\mathcal{O}$, $(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^{\wedge} \approx \dfrac{k((u_i))||X_1,X_2||}{(X_2^p + X_1^p(u_i + X_2^i))}$ donde el cuerpo de coeficientes es $k((u_i))$.

Sea $K_i = \overline{k((u_i))}$ cierre algebraico de $k((u_i))$, existe $u_{io} \in K_i$ con $u_{io}^p = u_i$ y mediante el isomorfismo dado por $X_{2i} = X_2 + u_{io}\ X_2$ tenemos $X_2^p + X_1^p\ (u_i + X_2^i) = X_{2i}^p + X_1^p(X_{2i} - u_{io}\ X_1)^i$ y de donde $\mathcal{O}_{u_i} \approx \dfrac{K_i||X_1,X_{2i}||}{(X_{2i}^p + X_1^p\ (X_{2i} - u_{io}\ X_1)^i)}$ para todo i, $1 \leq i < p$.

Tenemos que los cuerpos de coeficientes $k((u_i))$ de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ son isomorfos entre si para i, $1 \leq i < p$ y sin embargo las curvas genéricas $\mathcal{O}_{ui}$ no son isomorfas, es decir $\mathcal{O}_{ui} \neq \mathcal{O}_{uj}$ para todo $i \neq j$ con $1 \leq i < p$, $1 \leq j < p$.

b) <u>La característica de k es p</u>

Entonces existe resolución de singularidades para variedades degebraicas de dimensión 2 sobre un cuerpo perfecto (Abhyankar | 1 |) y en dicho caso si $k(\mathfrak{p})$ es perfecto la proposición 3 es cierta (E.G.A. IV, 7.9.6) y la fibra genérica en una sección es una curva. En este caso $\overline{k(\mathfrak{p})}$ es extensión es separable sobre $k(\mathfrak{p})$ y se verifican los corolarios 4.5 y 4.6.

Si la característica del cuerpo base k es distinta de cero y

$k(p)$ no es perfecto no es cierto el resultado anterior, según se deduce del estudio realizado por Grothendieck (E.G.A. Iv, 7.9).

Dada una deformación de la parametrización $|\Phi, \chi, A|$ con $A \in \hat{C}$ dominio de integridad, podemos considerar asociada a ella de <u>manera natural una A-sección</u> de la deformación asociada del siguiente modo.

Si $\Phi = \{\Phi_1,\ldots,\Phi_N\}$ con $\Phi_i = m_i + \psi_i(t)$ donde $m_i \in A$ y $\psi_i(o) = o$, la deformación asociada está dada por $\mathcal{O} \approx \dfrac{A||\underline{X}||}{(\ker \Phi)}$ donde $\Phi : A||\underline{X}|| \longrightarrow A||t||$ con $\Phi(X_i) = \Phi_i$ y dicha sección está dada por el ideal de $\mathcal{O}$, $(X,-m_1,\ldots,X_n-m_N)/(\ker \Phi)$.

En lo sucesivo, cuando digamos que una deformación con sección $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ admite parametrización $|\Phi, \chi, A|$ quiere decir que la sección s sea la natural de la parametrización.

<u>Definición 4.6</u>. Sea $A \in \hat{C}$ dominio de integridad, <u>llamaremos curva específica de la deformación de la parametrización</u> $|\Phi, \chi, A|$ a la curva que representa la parametrización χ. Sea K el cuerpo de fracciones de A y $\overline{K}$ su cierre algebraico. La parametrización $\{\Phi_1-m_1,\ldots,\Phi_N-m_N\}$ donde Φ_i, m_i, son como antes, nos proporciona una curva algebroide irreducible definida sobre K que llamaremos <u>curva genérica de la deformación de la parametrización</u> $|\Phi, X, A|$.

La curva genérica de $|\Phi, \chi, A|$ y la de su deformación asociada en la sección dada por $(X_1-m_1,\ldots,X_N-m_N)/(\ker \Phi)$ coinciden solo en el caso en que esta última sea irreducible. En otro caso la curva genérica de $|\Phi, X, A|$ representa una componente irreducible de la curva genérica de la deformación asociada.

Ejemplo: Sea $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A|$ con $\mathcal{O} \approx \frac{A||X_1 \ X_2||}{(X_2^2 - X_1^2 \ u - X_1^3)}$, $\mathcal{O}_o \approx \frac{k||X_1 \ X_2||}{(X_2^2 - X_1^3)}$

y $A \approx k||u||$, $c(k) = o$. Si consideramos la sección trivial (X_1, X_2) la curva genérica en dicha sección es

$\mathcal{O}_u \approx \frac{\overline{k((u))}||X_1, X_2||}{(X_2^2 - X_1^2 \ u - X_1^3)}$ curva reducible definida sobre $\overline{k((u))}$ cierre algebraico de $k((u))$. Una parametrización para $\mathcal{O}$ relativa a la sección trivial es $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2\}$ con $\Phi_1 = 2ut + t^2$, $\Phi_2 = 2u^2 t + 3ut^2 + t^3$ que tiene como curva genérica una curva irreducible de multiplicidad 1 que es una de las dos componentes irreducibles de $\mathcal{O}_u$.

Nota 4.7. Diremos que una sección s de la deformación $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A|$ es singular si la variedad que define su ideal p en $\mathcal{O}$ es singular es decir si $e(\mathcal{O}_p) > 1$ o equivalentemente en el caso en que exista curva genérica. $\mathcal{O}_u$ en s esta sea singular. El número de secciones singulares es finito ya que las variedades que las definen son hipersuperficies singulares en $\mathcal{O}$, cuyo número es finito.

Una deformación de la parametrización puede tener asociada una deformación con más de una sección singular como se ve en el siguiente ejemplo:

Sea $|\Phi, \chi, A|$ con $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2\}$, $\Phi_1 = t^2$, $\Phi_2 = ut^3 + t^5$, $A = k||u||$ la deformación asociada es

$\mathcal{O} \approx \frac{A||X_1, X_2||}{(X_2^2 - X_1^3 \ u^2 - 2X_1^4 \ u - X_1^5)}$. La sección de $|\Phi, \chi, A|$ es (X_1, X_2) que es singular. Vamos a comprobar que la sección $(X_1 + u, X_2)$ es también singular. Si hacemos en $A||X_1, X_2||$ el isomorfismo, $X_1 \longrightarrow X_1' = X_1 + u$, $X_2 \longrightarrow X_2' = X_2$, que es la identidad en $\mathcal{O}_o$

y por tanto un isomorfismo de la deformación, luego tenemos

$$\mathcal{O} \approx \frac{A||X_1,X_2||}{(X_2^2 - X_1^5 + 3X_1^4 u - 3X_1^3 u^2 + u^3 X_1^2)}$$ donde la nueva sección singular

es ahora la trivial, y es singular ya que la curva genérica

$$\mathcal{O}_u \approx \frac{\overline{k((u))}\ ||X_1,X_2||}{(X_2^2 - X_1^5 + 3X_1^4 u - 3X_1^3 u^2 + u^3 X_1^2)}$$ es singular.

<u>Definición 4.8</u>. Dada una deformación $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A|$ diremos que <u>una sección s es equimultiple</u> si $e(\mathcal{O}_o) = e(\mathcal{O}_p)$ donde p es el ideal que define la sección.

En el caso de estar definida la curva genérica en dicha sección, la deformación es equimúltiple en la sección si $e(\mathcal{O}_o) = e(\mathcal{O}_u)$, ya que $e(\mathcal{O}_u) = e(\mathcal{O}_p)$ (corolario 4.4).

<u>Nota 4.9</u>. Una deformación de una parametrización $|\Phi, \chi, A|$ diremos que es equimúltiple si lo es respecto de la sección natural asociada a ella. Es decir si las curvas χ y Φ_u tienen igual multiplicidad. Este hecho se puede caracterizar de la siguiente forma.

Sea la deformación $|\Phi, \chi, A|$, y $(X_1-m_1,\dots,X_N-m_N)$ la sección que determina entonces la deformación es equimúltiple si existe j, $1 \leq j \leq N$ tal que $o(\Phi_j-m_j) \leq o(\Phi_i-m_i)$ para todo i, $1 \leq i \leq N$ y además $\Phi_j = m_j + a_n t^n + a_{n+1} t^{n+1} + \dots$ donde a_n es unidad de A. Dado que la multiplicidad de una curva algebroide irreducible viene dada por el elemento de su parametrización de orden mínimo (0-4), como $\Phi_j \in \Phi_u$ es $res(\Phi_j) = \phi_j \in \chi$ al ser a_n unidad se sigue la equimultiplicidad.

Por analogía con el caso de curvas llamaremos a $z = (X_j - m_j) + (\ker \Phi)$ parámetro transversal de $\mathcal{O}$.

5. SEMIGRUPO DE UNA DEFORMACION

Dada una deformación que admite parametrización sobre un anillo $A \in \hat{\phi}$, se puede definir un subsemigrupo de $\mathbb{N}$, asociado a dicha deformación, en cierto sentido análoga a como se procede con una curva (0-8).

Definición 5.1. Llamaremos semigrupo de una deformación de una parametrización $|\Phi, \chi, A|$ con $A \in \hat{C}$ dominio de integridad a $S(\Phi) =$ $= \{\tau \in \mathbb{N} \mid$ existe un $z \in (\mathrm{im}\ \Phi)$ con $o(z) = o(\mathrm{res}\ z) = \tau\}$.

El semigrupo $S(\Phi)$ es el mismo para toda deformación $|\Phi', \chi, A|$ asociada a $|\Phi, X, A|$ (2,2.1). En efecto:

Los elementos de $(\mathrm{im}\ \Phi')$ se obtienen de los de $(\mathrm{im}\ \Phi)$ mediante la sustitución de t por una serie $u(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots.$ con a_1 unidad en A, y por lo tanto si $z = \phi(t)$ con $o(z) = o(\mathrm{res}\ z) =$ $= s \in S(\Phi)$, $z' = \phi(u(t))$ es $o(z') = o(\mathrm{res}\ z') = s$.

Dada una deformación $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ con $A \in \hat{C}$ dominio de integridad que admite una parametrización $|\Phi, \chi, A|$ llamaremos semigrupo de $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ a $S(\mathcal{O}, s) = S(\Phi)$.

Este último concepto es relativo a la sección al ser definido mediante la parametrización en esa sección. Y no es independiente de ella como prueba el ejemplo siguiente:

Sea $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A|$, $A = k||u||$, $\mathcal{O} \simeq \dfrac{A||X_1\ X_2||}{(X_2^2 - X_1^2 u - X_1^3)}$. Si consideramos una parametrización en la sección $(X_1 - u^2, X_2)$, $\Phi_1 = t^2 - u^2$,

$\Phi_2 = t^3-u^2t$ entonces $2 \in S(\Phi)$. Si tomamos la sección trivial (X_1,X_2), $\Phi_1^* = 2ut+t^2$, $\Phi_2^* = 2u^2t+3ut^2+t^3$ y entonces $2 \notin S(\Phi^*)$.

Notas 5.2.

5.2.1 En general no es cierto que el semigrupo $S(\Phi)$ tenga un complementario en $\mathbb{N}$ finito, como prueba el ejemplo siguiente:

Consideremos la deformación $|\Phi, \chi, A|$, con $\Phi = \{\Phi_1 = ut+t^2, \Phi_2 = t^3\}$, $\chi = \{\phi_1 = t^2, \phi_2 = t^3\}$ y $A = k||u||$. El semigrupo es $S(\Phi) = \{3n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene complementario finito.

En algunos casos $S(\Phi)$ tiene complementario finito y por tanto existe un conductor (0-8). Los ejemplos más interesantes son los siguientes casos:

(i) Si consideramos $|\Phi, \chi, A|$, con $\chi = \{\phi_1(t),\ldots,\phi_N(t)\}$, $A = k||u||$ y $\Phi = \{\Phi_1,\ldots,\Phi_N\}$, donde $\Phi_i = \phi_i(t)+u\,\psi_i(t,u)$ con $o_t(\psi_i(t,u)) > o(\phi_i(t))$ y m.c.d. $(o(\phi_1(t)),\ldots,o(\phi_N(t)) = 1$.

(ii) Si la deformación admite un desarrollo de Hamburger-Noether (3,5.3) entonces el complementario del semigrupo de dicha deformación es finito, como probaremos en el último capítulo.

5.2.2 Dada una deformación $|\Phi, \chi, A|$ con $A \in \hat{C}$, dominio de integridad, si $S(X_o)$ es el semigrupo de la curva específica y $S(\Phi_u)$ el de la curva genérica, se verifica que $S(\Phi) \subset S(\chi)$ y $S(\Phi) \subset S(\Phi_u)$. Los contenidos citados se deducen directamente de la definición de $S(\Phi)$ y en general son estrictos como prueba el siguiente ejemplo:

Sea $|\Phi, \chi, A|$ con $\Phi = \{\Phi_1 = t^8, \Phi_2 = ut^9+t^{10}, \Phi_3 = t^{15}\}$

$\chi = \{\phi_1 = t^8, \ \phi_2 = t^{10}, \ \phi_3 = t^{15}\}$ y $A = k||u||$.

Se verifica que $10 \in S(\chi)$ y $10 \notin S(\Phi)$ y $9 \in S(\Phi_u)$ y $9 \notin S(\Phi)$.

Además no se verifica en general que $S(\Phi) = S(\Phi_u) \cap S(\chi)$ ya que $25 \in S(\chi) \cap S(\Phi_u)$ y $25 \notin S(\Phi)$.

En caso en que $S(\Phi)$ tenga complementario finito si c es el conductor de $S(\Phi)$, c_o el conductor de $S(\chi)$ y c_u el de $S(\Phi_u)$ se tiene de lo anterior que $c_o \leq c$ y $c_u \leq c$.

Si el complementario de $S(\Phi)$ es finito podemos considerar a su conductor c como el <u>orden del conductor de</u> $A||t||$ <u>sobre</u> $(\mathrm{im}\ \Phi)$ en el sentido de la proposición siguiente.

<u>Proposición 5.4</u>. Dada una deformación $|\Phi, \chi, A|$, si existe $c \in \mathbb{N}$ conductor de $S(\Phi)$ se verifica que para todo $w \in A||t||$ tal que $o(w) \geq c$ es $w \in (\mathrm{im}\ \Phi)$.

<u>Demostración</u>.

Sea $w \in A||t||$ con $o(w) = m \geq c$, por ser c conductor de $S(\Phi)$ existe $z_m \in (\mathrm{im}\ \Phi)$, $z_m = a_m t^m + a_{m+1} t^{m+1} + \ldots$, con a_m unidad. Si $w = b_m t^m + b_{m+1} t^{m+1} + \ldots$ entonces

$$w = a_m^{-1} b_m z_m + w_1 \quad \text{con} \quad w_1 \in A||t|| \ \text{y} \ o(w_1) > m.$$

Repitiendo el proceso hecho para w a w_1 por ser $(\mathrm{im}\ \Phi)$ completo $w - (a_m^{-1} b_m z_m + c_{m+1}^{-1} b_{m+1} z_{m+1} + \ldots) = 0$ y entonces $w \in (\mathrm{in}\ \Phi)$.

Notas 5.5.

5.5.1 Dadas dos deformaciones $|\Phi', \chi, A|$, $|\Phi'', \chi, A|$ tales que existen conductores c', c'' para sus semigrupos $S(\Phi')$, $S(\Phi'')$, y con $\Phi' = \{\Phi_1',\ldots,\Phi_N'\}$, $\Phi'' = \{\Phi_1'',\ldots,\Phi_N''\}$ entonces existe un $c \in \mathbb{N}$ tal que si para todo i, $i=1,\ldots,N$, Φ_i', Φ_i'' tienen iguales todos los términos de grado menor o igual que c, entonces se verifica que las dos deformaciones son equivalentes (I-2.3). En efecto:

Sean c', c'' los conductores de los semigrupos $S(\Phi')$, $S(\Phi'')$ respectivamente.

Tomemos $c = \max\{c',c''\}$, se tiene que para todo i, $i=1,\ldots,N$ $i \leq o(\Phi_i' - \Phi_i'')$ y $c'' \leq o(\Phi_i' - \Phi_i'')$ entonces por la proposición anterior $(\Phi_i' - \Phi_i'') \in (\mathrm{im}\ \Phi')$ y $(\Phi_i' - \Phi_i'') \in (\mathrm{im}\ \Phi'')$, de lo que se sigue que $(\mathrm{im}\ \Phi') \simeq (\mathrm{im}\ \Phi'')$ y por lo tanto, las deformaciones son equivalentes.

5.5.2 De lo anterior podemos deducir un resultado análogo para desarrollos de Hamburger-Noether sobre el anillo A. Sean D', D'', dos desarrollos de N-N sobre A. Entonces existe un $d \in \mathbb{N}$ tal que si las matrices correspondientes a D', D'', tienen todos sus elementos iguales en las d primeras columnas, entonces se verifica que los desarrollos son equivalentes (I-3.5). En efecto:

Consideremos las parametrizaciones Φ', Φ'' asociadas a D', D'', y c', c'' conductores de $S(\Phi')$, $S(\Phi'')$. Tomemos $d = \max\{c',c''\}$. Por la condición impuesta a las matrices de D', D'', tenemos que Φ', Φ'' verifican las hipótesis de 5.1 y Φ', Φ'' son equivalentes y por tanto, D', D'' también lo son.

Observemos por último que d no tiene necesariamente que ser elegido de la forma anterior.

CAPITULO II

TRANSFORMACION MONOIDAL DE UNA DEFORMACION

Estudiamos en este capítulo el efecto de las transformaciones monoidales de una deformación con centro una sección sobre las fibras específica y genérica; y su relación con los transformados cuadráticos de dichas curvas. En el caso de considerar una deformación de una parametrización equimúltiple encontramos una expresión de su transformado monoidal como deformación de una parametrización del transformado cuadrático de la curva específica.

1. TRANSFORMADA CUADRATICA DE LA CURVA GENERICA

En esta sección comparamos las transformadas cuadráticas de la curva genérica de una deformación, con las curvas genéricas de los transformados monoidales de la deformación con centro en una sección de la deformación. Supondremos que el cuerpo base k es de característica cero para tener garantizado que la genérica es siempre una curva.

Sea la deformación $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ donde $A \in \hat{C}$ y $\mathcal{O}$ y A son dominios de integridad y p es el ideal de definición de s.

Notaciones 1.1.

1.1.1. Llamaremos transformación monoidal de $\mathcal{O}$ con centro s a la transformación monoidal de $\mathcal{O}$ con centro p. Si $p = (x_1,\dots,x_N)\mathcal{O}$ y $X = \operatorname{Spec} \mathcal{O}$ dicha transformación está dada por $T : S \to X$ con $S = Bl_p(\mathcal{O}) = \operatorname{Proj}\,(\bigoplus_{n\geq o} p^n) = \bigcup_{i=1}^{N} \operatorname{Spec}\,(\mathcal{O}_{x_i})$ con $\mathcal{O}_{x_i} = \mathcal{O}\left|\frac{x_1}{x_i},\dots,\frac{x_N}{x_i}\right|$ |4|, |25|.

1.1.2. Llamaremos transformado monoidal de $\mathcal{O}$ con centro s a Spec $(\mathcal{O}')$, siendo el completado respecto de su ideal maximal del anillo local de un punto $T^{-1}(m)$ es decir $\mathcal{O}' = ((Bl_p(\mathcal{O})|_n)^\wedge =$ $= ((\mathcal{O}_{x_i})_n)^\wedge$ para un cierto i con $1 \leq i \leq N$ con n ideal maximal de $\mathcal{O}_{x_i}$ tal que $n \supset p' \in \operatorname{Spec}\,(\mathcal{O}_{x_o})$ y $p' \cap \mathcal{O} = p$.

1.1.3. Sea R una cuasi curva (I-4.1) (en particular una curva) no necesariamente irreducible. Entonces si m es su ideal maximal generado por $z_1,\dots,z_N$, el explotado de R respecto del ideal m es

$Bl_m(R) = \bigcup_{i=1}^{N} \text{Spec}\left(R\left|\frac{z_1}{z_i},\dots,\frac{z_N}{z_i}\right|\right) = \text{Spec}\left(R\left|\frac{z_2}{z_1},\dots,\frac{z_N}{z_1}\right|\right)$, siendo z_1 parámetro transversal de R, es decir, su imagen en $\frac{m}{m^2}$ genera un ideal irrelevante del anillo graduado $\bigoplus_{n\geq o} \frac{m^n}{m^{n+1}}$. La existencia de dicho parámetro transversal está garantizada por contener R a k cuerpo infinito (|21|, 22.1). Tenemos además que $R\left|\frac{z_2}{z_1},\dots,\frac{z_N}{z_1}\right|$ es un anillo semilocal (|18| proposición 1.1) y por tanto finito sobre R. En este caso identificaremos $Bl_m(R)$ con el anillo $R\left|\frac{z_2}{z_1},\dots,\frac{z_N}{z_1}\right|$.

Con las notaciones anteriores, sea la cuasicurva $\mathcal{O}_p$ de ideal maximal $p\mathcal{O}_p$. El homomorfismo canónico $\phi : \mathcal{O} \to \mathcal{O}_p$ definido por $\phi(x_j) = \overline{x}_j$ nos proporciona una base del ideal $p\mathcal{O}_p$ compuesta por $\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_N$. Formemos la explosión de $\mathcal{O}_p$ con centro $p\mathcal{O}_p$, $Bl_{p\mathcal{O}_p}(\mathcal{O}_p) = \bigcup_{i=1}^{N} \text{Spec}\,(\mathcal{O}_p)_{\overline{x}_i}$ con $(\mathcal{O}_p)_{\overline{x}_i} = \mathcal{O}_p\left|\frac{\overline{x}_1}{\overline{x}_i},\dots,\frac{\overline{x}_N}{\overline{x}_i}\right|$.

El siguiente lema nos da una relación entre las cartas de los explotados de $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}_p$ respecto de p y $p\mathcal{O}_p$ respectivamente.

<u>Lema 1.2</u>. Para todo i, $1 \leq i \leq N$ $(\mathcal{O}_p)_{\overline{x}_i} \approx \mathcal{O}_p \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O})_{x_i}$.

<u>Demostración</u>.

$\mathcal{O}_p$ es $\mathcal{O}$-plano vía el homomorfismo $\phi : \mathcal{O} \to \mathcal{O}_p$. Podemos considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}|Y_1,\dots,Y_{N-1}| \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{x_i} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathcal{O}|Y_1,\dots,Y_{N-1}|\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}_p \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] & \mathcal{O}_{x_i}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}_p \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
\mathcal{O}_p|Y_1,\dots,Y_{N-1}| \arrow[r] & (\mathcal{O}_p)_{\overline{x}_i} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde la segunda fila se obtiene de la primera mediante tensorización por $\mathcal{O}_p$ y ψ definido por $\psi(\frac{x}{x_i} \otimes \frac{a}{b}) = \frac{\overline{x}}{\overline{x}_i} \cdot \frac{a}{b}$ es obviamente suprayectivo.

Si $\mathcal{O}_{(x_i)}$ es el localizado de $\mathcal{O}$ en $S = \{x_i^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, la sucesión $0 \to \mathcal{O}_{x_i} \to \mathcal{O}_{(x_i)}$ es exacta, y tensorizando por $\mathcal{O}_p$ se obtiene el diagrama de filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{x_i} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_p \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & \mathcal{O}_{(x_i)} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_p \arrow[d, "\Phi"] \\
0 \arrow[r] & (\mathcal{O}_p)_{\overline{x}_i} \arrow[r] & (\mathcal{O}_p)_{(\overline{x}_i)}
\end{tikzcd}$$

donde $(\mathcal{O}_p)_{\overline{x}_i} = \mathcal{O}_p\left|\frac{\overline{x}_1}{\overline{x}_i}, \dots, \frac{\overline{x}_N}{\overline{x}_i}\right|$, y puesto que Φ es isomorfismo ψ es inyectivo y por tanto es isomorfismo.

Consideremos los siguientes conjuntos de ideales,

$J = \{Q \in \operatorname{Spec} (\mathcal{O}_p)_{\overline{x}_i} \mid Q$ maximal$\}$, $L = \{p_j \in \operatorname{Spec} (\mathcal{O}_{x_i}) \mid p_j \ \ \mathcal{O} = p\}$.

<u>Proposición 1.3</u>. Con las notaciones anteriores se verifican los resultados siguientes:

(i) $((\mathcal{O}_p)_{\overline{x}_i})_{p_j} (\mathcal{O}_{x_i})_{p_j} \cap (\mathcal{O}_p)_{\overline{x}_i} \simeq (\mathcal{O}_{x_i})_{p_j}$ para todo $p_j \in L$ para todo i, $1 \leq i \leq N$.

(ii) Existe una biyección entre J y L.

<u>Demostración</u>.

(i) Sea $p_j \in L$, $p_j \cap \mathcal{O} = p$, luego para todo $p_j \in L$ el homomorfismo $\psi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_{x_i}$ induce un homomorfismo $\psi : \mathcal{O}_p \longrightarrow (\mathcal{O}_{x_i})_{p_j}$ "

que factoriza en la siguiente forma

$$\overline{\psi} : \mathcal{O}_p \xrightarrow{\overline{\psi}_1} \mathcal{O}_p \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_{x_i} \xrightarrow{\overline{\psi}_2} (\mathcal{O}_{x_i})_{p_j}, \quad \text{que es local, y}$$

$$(\mathcal{O}_{x_i})_{p_j} \approx (\mathcal{O}_p \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_{x_i})_{p_j(\mathcal{O}_{x_i})_{p_j} \cap (\mathcal{O}_p)_{\overline{x}_i}} \qquad \text{(1.k. |20|)}$$

y aplicando el lema 2 obtenemos el isomorfismo pedido.

(ii) Via el isomorfismo $\overline{\psi}_2 : \mathcal{O}_p \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_{x_i} \longrightarrow (\mathcal{O}_{x_i})_{p_j}$, definimos una aplicación $\rho : L \to J$ por $\rho(p_j) = p_j(\mathcal{O}_{x_i})_{p_j} \cap (\mathcal{O}_p)_{\overline{x}_i}$, $\rho(p_j)$ es primo, contiene a $p\mathcal{O}_p$, luego es maximal de $(\mathcal{O}_p)_{\overline{x}_i}$.

La aplicación ρ es inyectiva. En efecto:

Sean $p_j, p_g \in L$ con $\rho(p_j) = \rho(p_g)$. Consideremos

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & (\mathcal{O}_{x_i})_{p_j} \\ \mathcal{O}_{x_i} \arrow[r] & \mathcal{O}_p \otimes \mathcal{O}_{x_i} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & (\mathcal{O}_{x_i})_{p_g} \end{tikzcd}$$

$\rho(p_j)$, $\rho(p_g)$ son ideales primos de $\mathcal{O}_p \otimes \mathcal{O}_{x_i}$ y que por hipóte sis son iguales, y tales que yacen sobre p_j, p_g en $\mathcal{O}_{x_i}$ luego $p_j = p_g$.

La aplicación ρ es suprayectiva ya que todos los ideales de J son los ideales maximales de $(\mathcal{O}_p)_{\overline{x}_i} \approx \mathcal{O}_p \otimes \mathcal{O}_{x_i}$ y por tanto contienen al ideal $p(\mathcal{O}_p \otimes \mathcal{O}_{x_i})$, (I.k. |20|).

<u>Notas 1.4.</u>

1.4.1. La proposición anterior prueba que el número de ideales primos p_j de $\mathrm{Bl}_p(\mathcal{O})$ que yacen sobre p es igual al número de ideales maximales $\mathcal{Q}_j$ de $Bl_{p\mathcal{O}_o}(\mathcal{O}_p)$ y por la nota 1.1.3 dicho número es finito, pudiendose obtener dichos ideales p_j en una sola carta, $\mathcal{O}_{x_1}$ de $Bl_p(\mathcal{O})$, donde $\bar{x}_1$ es parámetro transversal de $\mathcal{O}_p$.

1.4.2. Con la proposición anterior tenemos una primera relacción entre la curva genérica de un transformado monoidal, y una transformada cuadrática de la genérica de la deformación.

En efecto, dado el ideal primo p_j de $Bl_p(\mathcal{O})$ que yace sobre p la proposición 1.3 prueba que existe un ideal maximal $\mathcal{Q}_j$ con $\mathcal{Q}_j \cap \mathcal{O}_p = p\mathcal{O}_p$ tal que se verifica

(1) $$(Bl_p(\mathcal{O}))_{p_j} \simeq (Bl_{p\mathcal{O}_p}(\mathcal{O}_p))_{\mathcal{Q}_j}$$

Si consideramos un ideal maximal m_j de $Bl_p(\mathcal{O})$ con $m_j \cap \mathcal{O} = p$ y $p_j \subset m_j$ es $(Bl_p(\mathcal{O}))_{p_j} \simeq ((Bl_p(\mathcal{O}))_{m_j})_{p_j}$, con lo que el primer miembro es una cuasi curva relacionada con la curva genérica del transformado monoidal de $\mathcal{O}$ obtenido por complección de $(Bl_p(\mathcal{O}))_{m_j}$ respecto de su ideal maximal. Respecto del segundo miembro (1), $\mathcal{O}_p$ es la cuasicurva que nos proporciona la curva genérica de $\mathcal{O}$ (I-4,1), con lo cual dicho miembro está relacionado con una transformada cuadrática de la curva genérica.

Las proposiciones siguientes nos dan condiciones relativas al anillo local de una cuasicurva, para que conmute el explotado de dicho anillo respecto de su ideal maximal, con su extensión por complección, ó extensión del cuerpo base a su cierre algebraico.

<u>Lema 1.5</u>. Sean R y S anillos semilocales de dimensión 1, Cohen-Macauly, $f : R \to S$ un homomorfismo plano que transforma no divisores

de cero en no divisores de cero. Entonces si J es un ideal de R que contiene a un no-divisor de cero $Bl_J(R) \otimes_R S \approx Bl_{JS}(S)$. (|18| corolario 1.2).

Proposición 1.6. Sea R el anillo de una cuasicurva de ideal maximal m, entonces $(Bl_m(R))^\wedge \approx Bl_{\hat{m}}(\hat{R})$ donde $(Bl_m(R))^\wedge$ es el completado respecto de su ideal radical y $\hat{R}$ el completado m-ádico.

Demostración.

Se verifican las hipótesis del lema anterior para $f : R \longrightarrow \hat{R}$. En efecto

i) f es plano (|20| pág. 170).

ii) f transforma no divisores de cero en no divisores de cero (|34| corolario 6, pág. 267).

Aplicando el lema 1.5 al ideal m y a los anillos R y $\hat{R}$ teniendo en cuenta que $\hat{m} = m\hat{R}$ es el ideal maximal de $\hat{R}$ es

$$Bl_m(R) \otimes_R \hat{R} \simeq Bl_{\hat{m}}(\hat{R})$$

donde $Bl_m(R)$ y $Bl_{\hat{m}}(\hat{R})$ son finitos como R y $\hat{R}$-módulos respectivamente. (nota 1.1.3) y por tanto $Bl_m(R) \otimes_R \hat{R} \approx (Bl_m(R))^\wedge$ (|34| pág. 277) siendo $(Bl_m(R))^\wedge$ el completado $m\,(Bl_m(R))$-ádico.

Ahora, como $Bl_m(R)$ es finito sobre R, entonces su topología como anillo semilocal, es decir, respecto de $m(Bl_m(R))$, es la misma que como R-módulo (|21|p.52. 16.8) luego $(Bl_m(R))^\wedge \approx Bl_{\hat{m}}(\hat{R})$.

Se puede observar que $Bl_{\hat{m}}(\hat{R})$ es un anillo semilocal completo para su ideal radical.

Proposición 1.7. Sean R el anillo local de una cuasicurva que tiene a K como cuerpo de coeficientes, $\overline{K}$ cierre algebraico de K y suponemos que $\overline{K}$ es separable sobre K. Entonces si $\overline{m}$ es ideal maximal de $R \otimes_K \overline{K}$ se verifica $Bl_m(R) \otimes_K \overline{K} \approx Bl_{\overline{m}}(R \otimes_K \overline{K})$.

Demostración.

$f : A \longrightarrow A \otimes_K \overline{K}$, verifica las condiciones del lema 1.5 ya que,

i) f es plano pues $i : K \longrightarrow \overline{K}$ es plano y por cambio de base de $K \longrightarrow A$ $A \otimes_K \overline{K}$ es A-plano.

ii) f transforma no divisores de cero en no divisores de cero ya que como $\overline{K}$ es separable sobre K no aparecen elementos nilpotentes (|20| pág. 194).

Si m es el ideal maximal de R, $m(R \otimes_K \overline{K}) = \overline{m}$ es el ideal maximal de $R \otimes_K \overline{K}$ ya que $g : \overline{K} \longrightarrow \frac{R \otimes_K \overline{K}}{m(R \otimes_K \overline{K})}$ es un isomorfismo puesto que como $1 \otimes 1 \notin m(R \otimes_K \overline{K})$ g es inyectivo, y como $K \subset R$, g es suprayectiva.

Aplicando el lema 1.5 a R, $R \otimes_K \overline{K}$ y a $\overline{m}$ tenemos $Bl_{\overline{m}}(R \otimes_K \overline{K}) \approx Bl_m(R) \otimes_R (R \otimes_K \overline{K}) \approx Bl_m(R) \otimes_K \overline{K}$.

Nota 1.8. Sea π : Spec $\mathcal{O}'$ $\longrightarrow$ Spec $\mathcal{O}$ un transformado monoidal de $\mathcal{O}$; la retracción Spec $\mathcal{O}$ $\longrightarrow$ Spec A induce una retracción π : Spec $\mathcal{O}'$ $\longrightarrow$ Spec A que permite considerar a $\mathcal{O}'$ como deformación con espacio de parámetros A. El problema está en trasladar la sección $s : \mathrm{Spec}\ A \longrightarrow \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}$ a una sección s^* de π^*, de modo que:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}\ A \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "s^*"'] & \mathrm{Spec}\ \mathcal{O} \\
 & \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}' \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

sea conmutativo, problema que, en general, no tiene solución, puesto que si p es el ideal que define la sección s, el transformado estricto de p no define, en general, una sección de π^*.

<u>Ejemplo</u>: Sea $\mathcal{O} \simeq \dfrac{A||X_1,X_2||}{(X_2^2 - u\ X_1^2 - X_1^3)}$, $A \approx k||u||$, el transformado monoidal de $\mathcal{O}$ con centro $p = (X_1,X_2)\mathcal{O}$, es $\mathcal{O}' \approx \dfrac{A||X_1,X_2'||}{(X_2'^2 - u - X_1)}$.

El transformado de p es $X_1\mathcal{O}'$, es decir, el ideal de $A||X_1,X_2'||$, $(X_2'^2 - u,\ X_1)$ y este ideal no nos define una sección para la retracción dada por $A \hookrightarrow \mathcal{O}'$, pues u no admite raíz.

Sin embargo, las curvas genéricas de $\mathcal{O}'$ sobre A se pueden calcular directamente en la forma siguiente:

La fibra genérica de $\mathcal{O}'$ sobre A es $\mathcal{O}' \otimes_A k(p)$ y las curvas genéricas se obtienen de $\mathcal{O}' \otimes_A k(p) \otimes_{k(p)} \overline{k(p)}$ localizando en cada uno de sus ideales maximales y completando en la topología asociada a cada ideal maximal correspondiente, de este modo, si $u_o \in \overline{k(p)}$ verificando que $u_o^2 = u$, se obtienen en este caso dos curvas

$$\mathcal{O}_1' \approx \frac{\overline{k(p)}||X_1,Y_1||}{(Y_1(Y_1-2\ u_o)-X_1)} \qquad y \qquad \mathcal{O}_2' \approx \frac{\overline{k(p)}||X_1,Y_2||}{(Y_2(Y_2+2u_o)-X_1)}\ .$$

El procedimiento de este ejemplo se puede aplicar en general e incluso cuando el ideal p_i de (1.4) no proporciona una sección, la curva genérica se puede calcular por el proceso anterior.

Lema 1.9. En las condiciones del principio de la sección si se dota a $\mathcal{O}_{\bar{x}_i}$, $1 \leq i \leq N$ de estructura de $k(p)$-espacio vectorial via el morfismo $k(p) \hookrightarrow \mathcal{O}_p \hookrightarrow \mathcal{O}_p \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_{x_i} \simeq \mathcal{O}_{\bar{x}_i}$ (1.2) se verifica que para todo i, $1 \leq i \leq N$,

$$\mathcal{O}_{\bar{x}_i} \otimes_{k(p)} \overline{k(p)} = \mathcal{O}_{x_i} \otimes_A \overline{k(p)}$$

Demostración.

$$\mathcal{O}_{\bar{x}_i} \otimes_{k(p)} \overline{k(p)} \simeq \mathcal{O}_{x_i} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_p \otimes_{k(p)} \overline{k(p)} \approx \mathcal{O}_{x_i} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O} \otimes_A k(p) \otimes$$
$$\otimes_{k(p)} \overline{k(p)} \simeq \mathcal{O}_{x_i} \otimes_A \overline{k(p)}.$$

En las hipótesis del principio de esta sección consideraremos ahora la curva genérica en la sección dada por p, $\mathcal{O}_u \approx (\mathcal{O}_p)^\wedge \hat{\otimes}_{k(p)} \overline{k(p)}$ y sea m_u su ideal maximal. $\mathcal{O}_p$ es una cuasicurva y podemos encontrar una carta, pongamos $\mathcal{O}_{\bar{x}_1}$, que contiene a todos sus transformados cuadráticos (1.1.3). Si identificamos como hicimos en (1.1.3) $Bl_{m_u}(\mathcal{O}_u)$ con su carta, se verifica

Proposición 1.10. $Bl_{m_u}(\mathcal{O}_u) \simeq (\mathcal{O}_{x_1} \otimes_A \overline{k(p)})^\wedge$.

Demostración.

Por el lema anterior se tiene que $\mathcal{O}_{\bar{x}_1} \otimes_{k(p)} \overline{k(p)} \simeq \mathcal{O}_{x_1} \otimes_A \overline{k(p)}$.

Identificando $Bl_{p\mathcal{O}_p}(\mathcal{O}_p)$ con $\mathcal{O}_{\bar{x}_1}$ es

$$\mathcal{O}_{x_1} \otimes_A \overline{k(p)} \approx \mathrm{Bl}_{p\mathcal{O}_p}(\mathcal{O}_p) \otimes_{k(p)} \overline{k(p)}$$

pero por la proposición 1.7, si $\overline{p\mathcal{O}_p}$ es el ideal extendido de p a $\mathcal{O}_p \otimes_{k(p)} \overline{k(p)}$, $\mathrm{Bl}_{p\mathcal{O}_p}(\mathcal{O}_p) \otimes_{k(p)} \overline{k(p)} \approx \mathrm{Bl}_{\overline{p\mathcal{O}_p}}(\mathcal{O}_p \otimes_{k(p)} \overline{k(p)})$, luego $\mathcal{O}_{x_1} \otimes_A \overline{k(p)} \approx \mathrm{Bl}_{\overline{p\mathcal{O}_p}}(\mathcal{O}_p \otimes_{k(p)} \overline{k(p)})$.

Ambos son anillos semilocales y completando respecto de sus radicales

$$(\mathcal{O}_{x_1} \otimes_A \overline{k(p)})^\wedge \approx (\mathrm{Bl}_{\overline{p\mathcal{O}_p}}(\mathcal{O}_p \otimes_{k(p)} \overline{k(p)}))^\wedge \approx \mathrm{Bl}_{\hat{\overline{p\mathcal{O}_p}}}(\mathcal{O}_p \otimes_{k(p)} \overline{k(p)})^\wedge$$

con $\hat{\overline{p\mathcal{O}_p}}$ el extendido de $\overline{p\mathcal{O}_p}$ (proposición 1.6).

Y como $(\mathcal{O}_p \otimes_{k(p)} \overline{k(p)})^\wedge \approx (\mathcal{O}_p)^\wedge \hat{\otimes}_{k(p)} \overline{k(p)}$ tenemos el resultado buscado

$$(\mathcal{O}_{x_1} \otimes_A \overline{k(p)})^\wedge \approx \mathrm{Bl}_{\hat{\overline{p\mathcal{O}_p}}}((\mathcal{O}_p)^\wedge \hat{\otimes}_{k(p)} \overline{k(p)}) \approx \mathrm{Bl}_{m_u}(\mathcal{O}_u).$$

El caso más frecuente y que usaremos en los capítulos finales es el contenido en el corolario siguiente

<u>Corolario 1.11</u>. Si $\mathrm{Bl}_p(\mathcal{O})$ es finito y existe un solo ideal maximal m_1 de $\mathrm{Bl}_p(\mathcal{O})$ que yace sobre m, entonces si $\mathcal{O}'$ es el transformado monoidal de $\mathcal{O}$ en m_1, las curvas genéricas de $\pi^* : \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}' \longrightarrow \mathrm{Spec}\ A$ son isomorfas a las transformadas cuadráticas de la curva genérica $\mathcal{O}_u$ de $\mathcal{O}$ a lo largo de p.

<u>Demostración</u>.

Sean $m_1 \in \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{x_1}$ y p_i un primo de $\mathrm{Bl}_p(\mathcal{O})$ que yace sobre p, entonces $p_i \subset m_1$ y como m_1 es el único ideal que yace sobre m, la única carta a usar para encontrar los transformados cuadráticos de $Bl_{p\mathcal{O}_p}(\mathcal{O}_p)$ es $\mathcal{O}_{\overline{x}_1}$.

Por la finitud de la transformación monoidal $\mathcal{O}_{x_1}$ es finito sobre $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}_{x_1}$ es completo y, además, local y, por tanto, $(\mathcal{O}_{x_1} \otimes_A \overline{k(p)})^\wedge \approx \mathcal{O}_{x_1} \hat{\otimes}_A k(p)$.

$Bl_{m_u}(\mathcal{O}_u)$ es un anillo semilocal: sean $n_1,\dots,n_r$ sus ideales maximales, entonces, por la proposición anterior, $\mathcal{O}_{x_1} \hat{\otimes}_A \overline{k(p)} \approx$ $\approx Bl_{m_u}(\mathcal{O}_u)$, luego $\mathcal{O}_{x_1} \hat{\otimes}_A \overline{k(p)}$ es semilocal de ideales maximales $n'_1,\dots,n'_r$ y, por tanto, para todo $i=1,\dots,r$ se verifica $(\mathcal{O}_{x_1} \hat{\otimes}_A \overline{k(p)})_{n'_i} \approx (Bl_{m_u}(\mathcal{O}_u))_{n_i}$ donde el primer miembro es la curva genérica de $\mathcal{O}'$ en n'_i y el segundo es el transformado cuadrático de $\mathcal{O}_u$ en n_i.

2. TRANSFORMADA MONOIDAL DE UNA DEFORMACION DE UNA PARAMETRIZACION

En esta sección estudiaremos la transformación monoidal de una deformación de una parametrización, en el caso en que dicha deformación sea equimúltiple. En dicho caso la deformación se comporta análogamente al caso de la parametrización de una curva respecto de su transformación cuadrática. Teniendo un sólo transformado monoidal y obteniendose este mediante la parametrización de la deformación.

A lo largo de la sección consideraremos una deformación de la parametrización $|\Phi, \chi, A|$ equimúltiple (I-4,9), con $A \in \hat{C}$ dominio de integridad. Denotaremos por $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A|$ la deformación asociada a $|\Phi, \chi, A|$ según (I-2, 2.1), es decir $\mathcal{O} \simeq \dfrac{A||X||}{(\ker \Phi)}$ y $\Phi : A||X|| \longrightarrow A||t||$ asociado a Φ.

<u>Lema 2.1</u>. Sea $x \in m$ no divisor de cero, $x \notin m_A\mathcal{O}$, sea B un anillo tal que $A||x|| \subset B \subset A||t||$. Se verifica que

(i) B es $A||x||$-módulo de tipo finito y entero sobre $A||x||$. En particular B es Noetheriano.

(ii) B es local.

(iii) $\dim B = \dim \mathcal{O}$ y B es completo con cuerpo de coeficientes k.

<u>Demostración</u>.

(i) Es claro que existe un $x \in m$ tal que $x \notin m_A\mathcal{O}$ ya que $\dfrac{\mathcal{O}}{m_A\mathcal{O}}$ es de dimensión 1 entonces se verifica que $A||t||$ es finito sobre $A||x||$.

En efecto: Si $\{u_1,\ldots,u_s\}$ son un sistema de parámetros de A, entonces $\{u_1,\ldots,u_s,x\}$ son un sistema de parámetros de $A||t||$, en vista de la condición pedida para x. Entonces por (|34| nota, pág. 293) tenemos que $A||t||$ es finito sobre $k||u_1,\ldots,u_s,x||$ y por tanto también lo es sobre $A||x||$, siendo además $A||t||$ entero sobre $A||x||$.

(ii) De lo anterior deducimos que B es finito y entero sobre $A||x||$. En efecto:

B es $A||x||$-submódulo de $A||t||$ que es noetheriano y finito sobre $A||x||$, con lo que B es finito sobre $A||x||$. B es evidentemente entero sobre $A||x||$.

$A||t||$ es finito y entero sobre $A||x||$, y por tanto $A||t||$ es entero sobre B.

Veamos ahora que B es local. En efecto:

Sean m'_1, m'_2 dos ideales maximales de B, se pueden elevar a dos ideales primos (maximales) m_1, m_2 de $A||t||$ necesariamente $m_1 = m_2$ luego $m'_1 = m_1B = m_2B = m'_2$.

(iii) De (i) $\dim B = \dim A||x|| = \dim A+1 = \dim \mathcal{O}$.

B es completo, pues se puede aplicar al teorema 15 (|34| pág. 276) a $A||x||$ y B, siendo además el ideal maximal m' de B, $m' = nB$ con n ideal maximal de $A||x||$.

k es el cuerpo de coeficientes de B ya que el homomorfismo $A||x|| \longrightarrow \frac{B}{m'}$ induce un homomorfismo finito $k \longrightarrow \frac{B}{m'}$ y como k es algebraicamente cerrado $k \simeq \frac{B}{m'}$.

Vamos a estudiar a continuación la transformación monoidal de $|\Phi, \chi, A|$ mediante el estudio de dicha transformación en la deformación asociada $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A|$.

Proposición 2.2. Sea $|\Phi, \chi, A|$ deformación de una parametrización equimúltiple. Sean $\{x_1,\dots,x_N\}$ una base del ideal primo p que determina la sección equimúltiple. Sea $x_1 \in \mathcal{O}$ parámetro transversal. Entonces se verifica que: $\left|\mathcal{O}\left|\frac{x_2}{x_1},\dots,\frac{x_N}{x_1}\right|, \mathcal{O}'_o, A\right|$ es la deformación asociada a $|\Phi', \chi', A|$ donde χ' es la transformada cuadrática de la parametrización χ (0-5.2) y Φ' es la parametrización

$\{\Phi'_1 = \Phi_1 - m_1,\ \ \Phi'_2 = \dfrac{\Phi_2 - m_2}{\Phi_1 - m_1}, \dots, \dfrac{\Phi_N - m_N}{\Phi_1 - m_1}\}$ donde $m_i \in A$.

Demostración.

(i) Φ' es una parametrización, es decir $\dfrac{\Phi_i - m_i}{\Phi_1 - m_1} \in A||t||$ $i=1,\dots,N$. En efecto:

Dado que x_1 es parámetro transversal (I-4.10.2), $\Phi_1 = m_1 + a_n t^n + a_{n+1} t^{n+1} + \dots$ con a_n unidad en A, luego $(\Phi_1 - m_1) = t^n\, u(t)$ con $u(t)$ unidad en $A||t||$. Por otra parte $o(\Phi_i - m_i) \geq n$ luego

$\Phi'_i = \dfrac{\Phi_i - m_i}{\Phi_1 - m_1} = \dfrac{(\Phi_i - m_i)}{t^n}\, u^{-1}(t) \in A||t||$ para $i=2,\dots,N$.

(ii) Φ' es una deformación de la parametrización χ' transformada cuadrática de χ. En efecto:

$\chi' = \{\phi_1, \dfrac{\phi_2}{\phi_1},\dots,\dfrac{\phi_N}{\phi_1}\}$ (0-5.2) donde $\phi_i = \operatorname{res} \Phi_i =$

$= \operatorname{res}(\Phi_i - m_i)$ con lo que $\operatorname{res} \Phi'_i = \dfrac{\operatorname{res}(\Phi_i - m_i)}{\operatorname{res}(\Phi_1 - m_1)} = \dfrac{\phi_i}{\phi_1}$.

(iii) $\mathcal{O}|\frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_N}{x_1}|$ es entero sobre $A||z_1||$, local, completo y de dimensión igual a la de $\mathcal{O}$. En efecto:

Sea $x_i = (X_i - m_i) + (\ker \Phi)$ la inclusión $i : \mathcal{O} \longrightarrow A||t||$ lleva x_i a $\Phi_i - m_i$, $i=1,\ldots,N$, con lo que de (i) tenemos que $i(\frac{x_i}{x_1}) \in A||t||$ y entonces se puede aplicar al anillo $B = \mathcal{O}|\frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_N}{x_1}|$ el lema 2.1 obteniendo lo pedido.

(iv) Por último $|\mathcal{O}|\frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_N}{x_1}|, \mathcal{O}'_o, A|$ es la deformación asociada a $|\Phi', \chi', A|$. Ya que:

Sea $\Phi' : A||\underline{X}'|| \longrightarrow A||t||$ definida por $\Phi'(X_i) = \Phi'_i$ y sea $\mathcal{O}' \approx \frac{A||\underline{X}'||}{(\ker \Phi')}$, mediante la inclusión $i : \mathcal{O}' \longrightarrow A||t||$ identificamos $x'_i = X'_i + (\ker \Phi')$ con Φ'_i, con lo que sobre $A||t||$ hemos identificado x_1 con x'_1 y x'_i con $\frac{x_i}{x_1}$.

En virtud del lema 2.1 $\mathcal{O}' \simeq A||x'_1||\ |x_2,\ldots,x'_N|$ y es entero sobre $A||x'_1||$, análogamente $\mathcal{O} \approx A||x_1||\ |x_2,\ldots,x_N|$ y por tanto

$$\mathcal{O}|\frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_N}{x_1}| \approx A||x_1||\ |x_2,\ldots,x_N, \frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_N}{x_1}| =$$

$$= A||x_1||\ |\frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_N}{x_1}|$$ y es entero sobre $A||x_1||$.

Por tanto a la vista de las identificaciones $\mathcal{O}' \approx \mathcal{O}|\frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_N}{x_1}|$ termina la demostración.

Nótese que $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ no son propiamente deformaciones pues sus fibras específicas pueden diferir de χ_o y χ'_o en componentes sumergidas según vimos en la nota (I-2.2)

Definición 2.3. A la vista de la proposición anterior, dada $|\Phi, \chi, A|$ llamaremos transformada monoidal de una deformación de la parametrización a la deformación de la parametrización $|\Phi', \chi', A|$ con χ' transformada cuadrática de χ y $\Phi' = \{\Phi_1 - m_1, \frac{\Phi_2 - m_2}{\Phi_1 - m_1}, \ldots, \frac{\Phi_N - m_N}{\Phi_1 - m_1}\}$.

Vamos a comprobar que en el caso en que nos ocupa, la transformación monoidal de la deformación asociada a una deformación de una parametrización equimúltiple, con centro la sección determinada por la parametrización se reduce a una sola transformada que es la que corresponde a la deformación asociada a la transformada monoidal de la definición 2.3.

Paralelamente a como procede Zariski en |35| con una curva podemos establecer las notaciones siguiente en $Bl_P(\mathcal{O}) = \bigcup_{i=1}^{N} \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}x_i)$, con $p = (x_1, \ldots, x_N)\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}x_i = \mathcal{O}|\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_N}{x_i}|$ definimos la relación de equivalencia ~ por:

Para todo $\Omega_{x_i} \in \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{x_i})$, $\Omega_{x_j} \in \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{x_j})$, $\Omega_{x_i} \sim \Omega_{x_j}$ si y sólo si $(\mathcal{O}_{x_i})_{\Omega_{x_j}} \approx (\mathcal{O}_{x_j})_{\Omega_{x_j}}$.

Dados x_i, x_j denotamos por N_{x_i,x_j} el sistema multiplicativamente cerrado de $\mathcal{O}_{x_i}$ formado por los elementos del tipo $(\frac{x_j}{x_i})^m$ con $m \geq 0$, y por $\mathcal{O}_{x_i,x_j}$ el anillo de fracciones de $\mathcal{O}_{x_i}$ respecto de N_{x_i,x_j}. Entonces se verifica:

Lema 2.4. (i) $\mathcal{O}_{x_i,x_j} = \mathcal{O}_{x_i}|\frac{x_i}{x_j}|$, x_j

(ii) $\mathcal{O}_{x_i,x_j} = \mathcal{O}_{x_j,x_i}$

Proposición 2.5. Sean $\mathcal{O}$ y $x_1,\dots,x_N$ como en las hipótesis de la proposición 2, entonces $\frac{x_i}{x_1}$ es unidad en $\mathcal{O}_{x_i}$.

Demostración.

$\frac{x_i}{x_1}$ es entero sobre $A||x_2||$ (2.2) sea $(\frac{x_i}{x_1})^s + a_{s-1}(x_1)x_i^{s-1} +$ $+ \dots + a_o(x_1) = o$ su ecuación, de donde $x_i^s + a_{s-1}(x_1)x_1\, x_i^{s-1} +$ $+ \dots + a_o(x_1)x_1^s = o$ sea $\frac{x_1}{x_i} = x_1'$, $x_i^s + a_{s-1}(x_1'\, x_i)x_1'\, x_i^s + \dots$ $+ a_o(x_1'\, x_i)x_1'^s\, x_i^s = o$, ya que como x_i es no divisor de cero en $\mathcal{O}_{x_i}$, $1 + x_1'(a_{s-1}(x_1'\, x_i) + \dots + a_o(x_1'\, x_i)\, x_1'^{s-1}) = o$.

Corolario 2.6. En las mismas hipótesis, se tiene $\mathcal{O}_{x_i} = \mathcal{O}_{x_1,x_i}$ para todo $i=2,\dots,N$.

Demostración.

$\mathcal{O}_{x_1,x_i} = \mathcal{O}_{x_i,x_1}$ (lema 2.4) y $\mathcal{O}_{x_i} \subset \mathcal{O}_{x_i,x_1}$ basta ver que $\mathcal{O}_{x_i,x_1} \subset \mathcal{O}_{x_i}$, en efecto,

$\mathcal{O}_{x_i,x_1} = \mathcal{O}|\frac{x_1}{x_i},\dots,\frac{x_N}{x_i},\frac{x_i}{x_1}|$ y por la proposición anterior $\frac{x_i}{x_1}$ es unidad en $\mathcal{O}_{x_i}$.

Corolario 2.7. una aplicación biyectiva ψ de Spec $(\mathcal{O}_{x_1})$ en $T = Bl_p(\mathcal{O})/\sim$.

Demostración.

Definimos $\psi(\Omega_{x_1}) = \overline{\Omega}_{x_1}$ clase de x_1 en T, ψ es inyectiva por definición de T.

ψ es suprayectiva, ya que dado $\Omega_{x_i} \in (\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{x_i})$, $\Omega_{x_1} = \Omega_{x_i} \cap \cap \mathcal{O}_{x_1}$ con $(\mathcal{O}_{x_1})_{\Omega_{x_1}} = (\mathcal{O}_{x_1,x_i})_{\Omega_{x_i}}$ (Corolario 2.6) y de (ii) proposición 2.4, se sigue $(\mathcal{O}_{x_1})_{\Omega_{x_1}} \simeq (\mathcal{O}_{x_i})_{\Omega_{x_i}}$.

Notas 2.8.

2.8.1. De lo anterior se sigue que todas las transformadas monoidales de $\mathcal{O}$ con centro p se hallan a partir de $\mathrm{Bl}_p(\mathcal{O})$ mediante localizaciones en ideales maximales de la carta $\mathcal{O}\left|\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_N}{x_1}\right|$.

2.8.2. De la posición 2.2 tenemos que $\mathcal{O}\left|\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_N}{x_1}\right|$ es local y completo con lo que de 8.1 obtenemos que el único transformado monoidal de $\mathcal{O}$ con centro p es $\mathcal{O}\left|\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_N}{x_1}\right|$.

Corolario 2.9. Dada una deformación irreducible $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ con s una sección equimúltiple, y que admite una parametrización respecto a dicha sección. Entonces sólo tiene un transformado monoidal con respecto a dicha sección y viene dado por $\mathcal{O}\left|\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_N}{x_2}\right|$ donde $\{x_1,\ldots,x_N\}$ es una base del ideal p que define la sección y x_1 es transversal.

Demostración.

Se sigue directamente de la nota 1.8.

Cuando consideremos parametrizaciones de Hamburger-Noether sobre un anillo A, podemos hablar de transformada monoidal de la siguiente forma, análoga al caso de curvas.

Definición 2.10. Dado un desarrollo de H-N sobre un anillo A

$$\begin{cases} Y = A_{o1}\, x_1 + \dots + A_{oh}\, x_1^h + Z_1\, x_1^h \\ \overline{Z}_1 = A_{11}\, z_1 + \dots + A_{1h_1}\, z_1^{h_1} + Z_2\, z_1^{h_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overline{Z}_r = \sum\limits_{1\leq i\leq\infty} A_{ri}\, z_r^i \end{cases}$$

llamaremos transformado monoidal de dicho desarrollo a

$$\begin{cases} Y_1 = A_{o2}\, x_1 + \dots + A_{oh}\, x_1^{h-1} + Z_1\, x_1^{h-1} \\ \overline{Z}_1 = A_{11}\, z_1 + \dots + A_{1h_1}\, z_1^{h_1} + Z_2\, z_1^{h_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overline{Z}_r = \sum\limits_{1\leq i\leq\infty} A_{ri}\, z_r^i \end{cases} \qquad \text{si } h > 1, \text{ ó a}$$

$$\begin{cases} \overline{Z}_1 = A_{11}\, z_1 + \dots + A_{1h_1}\, z_1^{h_1} + Z_2\, z_1^{h_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overline{Z}_r = \sum\limits_{1\leq i\leq\infty} A_{ri}\, z_r^i \end{cases} \qquad \text{si } h = 1.$$

En ambos casos es evidente que el transformado monoidal es un desarrollo de H-N.

Nota 2.11. Si $A \in \mathcal{C}$ y es Dominio de integridad, la definición dada es compatible con la definición 2.3, en el sentido siguiente:

En este caso un desarrollo de H-N, D nos proporciona una deformación $|\Phi, \text{res } \Phi, A|$ de la parametrización de una curva. (I-3.3), entonces la deformación proporcionada por D' transformado monoidal de D, es asociada a $|\Phi', \text{res } \Phi', A|$ donde Φ' es la transformada monoidal de Φ.

CAPITULO III

DEFORMACIONES EQUISINGULARES

En este capítulo damos tres definiciones de deformación equisingular a lo largo de una sección, relacionadas con el proceso de resolución. La primera de ellas supone la existencia de una resolución de la variedad de la deformación por medio de transformaciones monoidales sucesivas. La segunda consiste en la igualdad de las sucesiones de multiplicidad de las curvas genérica y específica y por último la tercera de ellas supone la existencia de un desarrollo de Hamburger-Noether para la deformación.

En la segunda sección comparamos las tres definiciones dadas probando que la primera y la tercera son equivalentes y ambas implican la segunda.

1. DEFINICIONES DE EQUISINGULARIDAD

En el caso analítico existen diversas definiciones de equisingularidad para variedades que no sean hipersuperficies, en general estas definiciones no son equivalentes. Vamos a trasladarlas al caso de curvas algebroides alabeadas, resolviendo las dificultades técnicas que se presentan en el proceso, para hacer una comparación entre ellas y un concepto de equisingularidad que estableceremos a partir del desarrollo de Hamburger-Noether.

1.1. Equisingularidad según Stuz.

La definición de equisingularidad residual de Stuz |27| para variedades analíticas con lugar singular liso de codimensión 1, se puede trasladar a nuestro caso, es decir a una deformación $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ donde $A \in \hat{\mathcal{C}}$ regular y $\mathcal{O}$ dominio de integridad, con una única sección singular s. La definición de Stuz es, en nuestro caso, como sigue:

Definición 1.1.1. Dada la deformación $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$, con $A \in \hat{\mathcal{C}}$ regular y una única sección singular s, diremos que $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ es equisingular ES1 a lo largo de s, si y sólo si se verifican las condiciones siguientes:

(i) Sea p el ideal de la sección s y m el ideal maximal de $\mathcal{O}$, si $\tilde{\pi}_1 : Bl_p(\mathcal{O}) \longrightarrow Spec\ (\mathcal{O})$, $\tilde{\pi}_1$ es finito y para todo punto cerrado $m_1 \in \tilde{\pi}^{-1}(m_1)$ el transformado monoidal en la dirección de m_1 de $\mathcal{O}$, $\pi_1 : Spec\ ((Bl_p(\mathcal{O})_{m_1})^{\wedge} \longrightarrow Spec\ \mathcal{O}$ es independiente del punto m_1 utilizado para construirlo.

(ii) Sea $p_{i-1} \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{i-1}$ un ideal primo minimal que yace sobre p_{i-2} via el morfismo π_{i-1}. El morfismo $\tilde{\pi}_i : Bl_{p_{i-1}}(\mathcal{O}_{i-1}) \longrightarrow$ $\rightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{i-1}$ es finito y si m_{i-1} es el ideal maximal de $\mathcal{O}_{i-1}$, el morfismo $\pi : \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_i) = \operatorname{Spec}((Bl_{p_{i-1}}(\mathcal{O}))_{m_{i-1}})^{\wedge} \longrightarrow \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{i-1})$ es independiente del punto cerrado $m_i \in \tilde{\pi}_i^{-1}(m_{i-1})$ utilizado para definirlo.

(iii) Para todo i, o bien $\mathcal{O}_i$ es regular, o su lugar singular es $\pi_i^{-1} \ldots \pi_1^{-1}(V(p))$.

(iv) Existe un $r \in \mathbb{N}$ con $\mathcal{O}_r$ regular (y por tanto $\mathcal{O}_j$, con $j > r$, regular).

(v) Sea $p^* = {}^a\pi_r^{-1} \ldots {}^a\pi_1^{-1}(p)$ (con ${}^a\pi_i : \mathcal{O}_{i-1} \longrightarrow \mathcal{O}_i$ morfismo asociado a π_i) entonces $\left(\frac{\mathcal{O}_r}{p^*\mathcal{O}_r}\right)_{red} \approx A$.

Notas

1.1.2. Esta definición, pensada para característica 0, es independiente de la retracción $\operatorname{Spec} \mathcal{O} \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ que permite construir $\operatorname{Spec} \mathcal{O}$ como familia de curvas con $\operatorname{Spec} A$ como espacio de parámetros; es decir, con ella si $\operatorname{Spec} \mathcal{O}$ es equisingular a lo largo de $\operatorname{Spec} A$ para cualquier posibilidad de considerar $\operatorname{Spec} \mathcal{O}$ como familia de curvas sobre $\operatorname{Spec} A$, la familia resultante es equisingular. En característica 0, y para familias de curvas planas, Zariski demuestra la irrelevancia de la retracción al probar la independencia de la fibra genérica del cuerpo de coeficientes elegido. Sin embargo en característica p, Abhyankar prueba que, incluso para curvas planas, la equisingularidad depende de la retracción, con el ejemplo siguiente:

Ejemplo

Sea la deformación del ejemplo posterior a (I-4.6),

$\mathcal{O} \approx \dfrac{k||u,X_1,X_2||}{(X_2^p + u\,X_1^p)}$, el transformado monoidal con centro la sección $p = (X_1,X_2)\mathcal{O}$ es $\mathcal{O}' \approx \dfrac{k||u,\,X_1,X_2'||}{(X_2'^p + u)}$ con $X_2 = X_1\,X_2'$ que es regular, el transformado de p es $X_1\mathcal{O}'$ con lo que $\dfrac{\mathcal{O}'}{X_1\mathcal{O}'} \approx k||u|| \approx \dfrac{\mathcal{O}}{p}$

Luego $\mathcal{O}$ es equisingular ES1. Sin embargo, si lo consideramos como deformación dando la retracción que sumerge A en $k||u - X_2^i||$ con $1 \leq i < p$, obtenemos $\mathcal{O} \simeq \dfrac{A||X_1,X_2||}{(X_2^p + X_1^p\,(u_i + X_2^i))}$ como deformación sobre $A \approx k||u_i||$, con $u_i = u - X_2^i$, de $\mathcal{O}_o \approx \dfrac{k||X_1,\,X_2||}{(X_2^i(X_2^{p-i} + X_1^p))}$. La curva genérica a lo largo de s dada por $p = (X_1,X_2)\mathcal{O}$ es

$$\mathcal{O}_u \approx \frac{k||X_1,X_2||}{(X_{2i}^p + X_1^p(X_{2i} - u_{io}\,X_1)^i)}$$ con $K_i \approx \overline{k((u_i))}$ (I-4.6).

$|\mathcal{O},\,\mathcal{O}_o,\,A,\,s|$ no es equisingular según Zariski ya que las curvas $\mathcal{O}_o$ y $\mathcal{O}_u$ tienen distinto proceso de resolución. En efecto:

El transformado cuadrático de $\mathcal{O}_o$ es $\dfrac{k||X_1,X_2'||}{(X_2'^p + X_2'^i\,X_1^i)}$ que tiene multiplicidad $\min\{p,\,2i\}$ y sin embargo el transformado cuadrático de $\mathcal{O}_u$ es $\dfrac{K_i||X_1,X_2'||}{(X_{2i}'^p + (X_{2i}'\,X_1 - u_{io}\,X_1)^i)}$ que tiene multiplicidad i.

1.1.3. De las condiciones de la definición se desprende que no es posible que existan, en alguna etapa, más de un ideal primo minimal p_i que yazca sobre p_{i-1} via π_i, es decir, no se puede presentar la situación del ejemplo siguiente

Ejemplo: La deformación $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ con $A \approx k||u||$

$\mathcal{O} \approx \dfrac{k||u,X_1,X_2||}{(X_2^2 - X_1^2 u^2 - X_1^3)}$ y s dada por el ideal $p = (X_1,X_2)\mathcal{O}$ no es equisingular ES1. En efecto:

El transformado monoidal con centro p es $\mathcal{O}_1 \approx \mathcal{O}\left|\dfrac{x_2}{x_1}\right|$ y si $\dfrac{x_2}{x_1} = x_2'$ es $\mathcal{O}_1 \approx \dfrac{k||u,X_1,X_2'||}{(X_2'^2 - u^2 - X_1)} \approx k||u,X_2'||$ regular, pero sin embargo la imagen del lugar singular no es isomorfa a él.

El ideal $p\mathcal{O}_1 \approx X_1\mathcal{O}_1$ es $(X_1,X_2'^2 - u^2)k||u,X_1,X_2'||$ y la variedad $\dfrac{\mathcal{O}_1}{p\mathcal{O}_1}$ es $\dfrac{k||u_1,X_2'||}{(X_2'^2 - u^2)}$ no es regular y por lo tanto no es isomorfa a $\dfrac{\mathcal{O}}{p} \approx A$.

Existen dos primos minimales, que yacen sobre p, dados por $(X_2' - u)\mathcal{O}_1$ y $(X_2' + u)\mathcal{O}_1$.

1.1.4. Veamos ahora un ejemplo de deformación equisingular ES1

Ejemplo: La deformación $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ con $A = k||u||$

$\mathcal{O} \approx \dfrac{k||u, X_1,X_2||}{(X_1^3 - X_2^2)}$ y s dada por el ideal $p = (X_1,X_2)\mathcal{O}$ es equisingular ES1 En efecto:

Sea $x_i = X_i + (X_1^3 - X_2^2)$, el transformado monoidal de $\mathcal{O}$ con centro p es $\mathcal{O}_1 \approx \mathcal{O}\left|\dfrac{x_2}{x_1}\right|$, si llamamos $\dfrac{x_2}{x_1} = x_2'$ entonces es $\mathcal{O}_1 \approx \dfrac{k||u, X_1,X_2'||}{(X_1 - X_2'^2)} \approx k||u_1,X_2'||$ regular; la imagen del lugar singular es $p\mathcal{O}_1 = X_1\left(\dfrac{k||u, X_1,X_2'||}{(X_1 - X_2'^2)}\right) = (X_1,X_2'^2)\ k||u, X_1,X_2'||$ y la variedad reducida $\left(\dfrac{\mathcal{O}_1}{p\mathcal{O}_1}\right)_{red}$ es $\dfrac{k||u, X_1,X_2'||}{(X_1,X_2')} \approx k||u|| \approx \dfrac{\mathcal{O}}{p} \approx A.$

1.2. Equisingularidad según Zariski

Zariski da en [35] varias definiciones equivalentes de equisingularidad de hipersuperficies a lo largo de una subvariedad singular regular y de codimensión 1, es decir para una familia de curvas planas. De entre ellas generalizamos la que resulta de comparar la singularidad de la curva genérica y la obtenida por una sección transversal. Al ser una familia de curvas alabeadas no se puede considerar como una hipersuperficie sobre una subvariedad de codimensión 1 y en lugar de una curva obtenida por una sección transversal, hemos de tomar una fibra específica. Tampoco existe un criterio único de equisingularidad para curvas alabeadas, por lo cual y en vista de que pretendemos comparar la definición con otras resultantes de un proceso de resolución simultánea por etapas, tomaremos como criterio de equisingularidad el de equirresolución, es decir, el de igualdad de las sucesiones de multiplicidades.

<u>Definición 1.2.1</u>. Dada la deformación $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$, con $A \in \mathcal{C}$ dominio de integridad y s la única sección singular dada por el ideal p, diremos que <u>$|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ es equisingular ES2 a lo largo de la sección s si se verifica</u>:

(i) $\mathcal{O}_p$ es geométricamente no ramificado, es decir, la curva genérica $\mathcal{O}_u \simeq (\mathcal{O}_p)^\wedge \hat{\otimes}_{k(p)} \overline{k(p)}$ es dominio de integridad.

(ii) $E(\mathcal{O}_o) = E(\mathcal{O}_u)$, $E(\ ) \equiv$ sucesión de multiplicidades (0-5).

Nótese que en la definición no se exige que A sea regular ni que la característica de k sea cero.

Nota 1.2.2. Esta definición, además de depender de la sección s, depende de la retracción $\operatorname{Spec} \mathcal{O} \longrightarrow \operatorname{Spec}(A)$ que define la deformación, ya que, en general, la curva genérica depende del cuerpo de coeficientes $k(p)$ (salvo si $c(k) = 0$ (I-4.6)) quedando este determinado por el morfismo $\operatorname{Spec} \mathcal{O} \longrightarrow \operatorname{Spec} A$. Luego, podemos definir el concepto de deformación equisingular ES2 a lo largo de una sección, pero no el de variedad $\operatorname{Spec} \mathcal{O}$ a lo largo de una subvariedad $\operatorname{im}(s)$. En característica cero si podríamos definirlo.

1.2.3. Veamos a continuación un par de ejemplos, uno de deformación ES2 y otro que no lo es.

Ejemplos. 1) Sea $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ como en (1) entonces la curva específica es $\mathcal{O}_o \simeq \dfrac{k|| X_1, X_2||}{(X_1^3 - X_2^2)}$, y la curva genérica es $\mathcal{O}_u \approx \dfrac{\overline{k((u))}|| X_1, X_2||}{(X_1^3 - X_2^2)}$, dominio de integridad, $\overline{k((u))}$ cierre algebraido de $k((u))$ y ambas son equisingulares ES2 pues $E(\mathcal{O}_o) = (2,1)$, $E(\mathcal{O}_u) = (2,1)$.

2) Sea $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ como en (2), entonces la curva genérica $\mathcal{O}_u \simeq \dfrac{\overline{k((u))}|| X_1, X_2||}{(X_1^2 - X_2^2\ u_o^2 - X_3^2)}$ no es dominio de integridad, luego es ramificado y por lo tanto no es equisingular ES2

1.3. Equisingularidad y desarrollos de Hamburger Noether.

Campillo en |10| define, en el caso de familias de curvas planas, el concepto de equisingularidad mediante el desarrollo de Hamburger-Noether. En nuestro caso damos la definición siguiente

<u>Definición 1.3.1</u>. Dada la deformación $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ con $A \in \hat{C}$ y s la única sección singular, diremos <u>$|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ es equisingular ES3 a lo largo de la sección s</u> si admite un desarrollo de Hamburger-Noether relativo a la sección s.

<u>Nota 1.3.2</u>. Esta definición, al igual que la anterior, depende de la retracción dada por la deformación.

<u>Ejemplos</u>. (1) Sea $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ como en (1) entonces existe un desarrollo para $\mathcal{O} = \dfrac{k||u, X_1, X_2||}{(X_1^3 - X_2^2)}$ dado por $\{x_2 = x_1 z_1, \quad x_1 = z_1^2\}$, luego es equisingular ES3.

(2) Sea $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ como en (2). Hay dos parametrizaciones de $\dfrac{k||u, X_1, X_2||}{(X_2^2 - X_1^2 u^2 - X_1^3)}$ relativas a la sección s que son

$$(I) \begin{cases} X_1 = 2ut + t^2 \\ X_2 = -2u^2 t + ut^2 + t^3 \end{cases} \qquad (II) \begin{cases} X_1 = -2ut + t^2 \\ X_2 = -2u^2 t - ut^2 + t^3 \end{cases}$$

y que corresponden a las dos ramas de la curva genérica. Ambas parametrizaciones no son equimúltiples y por lo tanto no se puede construir un desarrollo de H-N para $\mathcal{O}$ y no es pues equisingular ES3

2. COMPARACION DE LAS DEFINICIONES DE EQUISINGULARIDAD

En esta sección vamos a comparar las tres definiciones de equisingularidad dadas. Debido a que cada una de ellas está dada en diferentes hipótesis las reduciremos, al compararlas, a hipótesis comunes a las otras dos.

Veamos en primer lugar que la definición de existencia de desarrollo de H-N ES3 implica las otras dos, cada una en sus condiciones particulares.

Proposición 2.1. Sea $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ con $A \in \hat{\mathcal{C}}$ regular y s la única sección singular, entonces si $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ es equisingular ES3, a lo largo de s, es también equisingular ES1 a lo largo de s.

Demostración.

Veamos que $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ verifica las condiciones de la definición ES1.

Sea D el desarrollo de H-N que admite $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$. Denotemos por $|\Phi, \chi, A, s|$ su parametrización asociada, que es por tanto parametrización de $\mathcal{O}$. La parametrización Φ es equimúltiple, pues proviene de un desarrollo de H-N y por tanto su transformación monoidal a lo largo de s se puede hallar a partir de Φ (II-2).

(i) Sea el ideal $p = (X_1-m_1,\ldots,X_N-m_N)\mathcal{O}$ el que determina s, entonces $Bl_p(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O})$ es finito y existe un único transformado monoidal.

En efecto:

Según vimos en (II-2.8) solo hay un transformado monoidal, que es $O\left|\frac{x_1}{x_1},\dots,\frac{x_N}{x_1}\right|$ con $x_i = (X_1-m_i) + (\ker \Phi)$, x_1 parámetro transversal de Φ. Este transformado es a su vez la deformación asociada a la parametrización de $\Phi^1 = \{\Phi_1-m_1 , \frac{\Phi_2-m_2}{\Phi_1-m_1} ,\dots, \frac{\Phi_N-m_N}{\Phi_1-m_1}\}$, transformada cuadrática de Φ (II-2.3). Φ^1 es la parametrización que determina D^1 transformado monoidal del desarrollo de H-N, D según vimos en (II-2.10), (II-2.11).

$\pi : Bl_p(O) \longrightarrow \mathrm{Spec}\,(O)$ es finito ya que $Bl_p(O) =$
$= \bigcup_{i=1}^{N} \mathrm{Spec}\,(O\left|\frac{x_1}{x_i} ,\dots, \frac{x_N}{x_i}\right|)$, siendo $\mathrm{Spec}\,O\left|\frac{x_2}{x_1} ,\dots, \frac{x_N}{x_1}\right| \to \mathrm{Spec}\,(O)$ finito por serlo $\theta \hookrightarrow O\left|\frac{x_2}{x_1} ,\dots, \frac{x_N}{x_1}\right|$, y para $i \neq 1$ también se verifica, dada la relación que existe entre $\mathrm{Spec}\,(O\left|\frac{x_1}{x_i} ,\dots, \frac{x_N}{x_i}\right|)$ y $\mathrm{Spec}\,(O\left|\frac{x_2}{x_1} ,\dots, \frac{x_N}{x_1}\right|)$ (II-2).

(ii) Consideremos el ideal $p_1 = (x'_1,\dots,x'_N)O_1$, con $x'_1 = x_1$, $x'_i = \frac{x_i}{x_1}$, que es primo ya que A es dominio de integridad y $O_1 \approx A||x_1|| \; |x'_2,\dots,x'_N|$, según se ve en la demostración de la proposición (II-2.2), y yace sobre p pues $pO_1 \approx x_1O_1$. O_1, p_1, Φ^1 y D_1 estan en las mismas hipótesis que O, p, Φ y D y por tanto inductivamente llegamos a O_{i-1}, p_{i-1}, Φ^{i-1}, D_{i-1} y se verifica (ii) de la definición ESl.

(iv) O_r es regular si Φ^r es de multiplicidad 1, es decir, si r es tal que el desarrollo D_r viene dado por su última fila

$\overline{Z}_s = \sum_{1\leq i\leq\infty} A_{si}\, z_s^i$, donde $v(z_s) = 1$ (II-2.10). En este caso, Φ es tal que existe s, $s=1,\ldots,N$, con $\Phi_s = a_1 t + a_1 t^2 + \ldots.$, a_1 unidad en A, de lo que se deduce que $\mathcal{O}_r \approx A||t||$.

(iii) Si $\mathcal{O}_i$ no es regular entonces Φ^i tiene multiplicidad distinta de 1 y $\mathcal{O}_i$ es singular en $p_i = (x_1^i,\ldots,x_N^i)\mathcal{O}_i$, ya que la curva genérica a lo largo de p_i es singular según se deduce de la parametrización Φ_i.

(iv) Sea $\mathcal{O}_r \approx A||t||$ regular. La imagen de p por $\pi_r^{-1} \ldots \pi_1^{-1}$ es $p\, A||t|| \approx x_1\, A||t||$ donde $x_1 = a_1 t^n + a_2 t^{n+1} \ldots.$, con a_1 unidad de A, ya que Φ es equimúltiple. Luego

$$\frac{A||t||}{\sqrt{x_1\, A||t||}} \approx A.$$

Proposición 2.2. Sea $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ con $A \in \hat{\mathcal{C}}$ dominio de integridad, s la única sección singular, entonces si $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ es equisingular ES3 a lo largo de s, es también equisingular ES2.

Demostración.

Supongamos que $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ verifica ES3, vamos a comprobar que verifica las condiciones de ES2.

(i) La curva genérica a lo largo de la sección s dada por el ideal p, $\mathcal{O}_u \approx (\mathcal{O}_p)^\wedge\, \hat{\otimes}_{k(p)}\, \overline{k(p)}$ es dominio de integridad. En efecto:

$\mathcal{O}$ admite una parametrización Φ, dada por su desarrollo, y por tanto $\mathcal{O}_u$ no tiene elementos nilpotentes (I-4.6). Una de las ramas

$\mathcal{O}_u$ viene dada por Φ_u (I-4.6) y, ya que Φ es equimúltiple, $\mathcal{O}_u$ debe tener una sola rama. En efecto:

Si tuviera dos ramas, la multiplicidad de la curva genérica $\mathcal{O}_u$ sería mayor que la de la específica $\mathcal{O}_o$, y esto está en contradicción con la semicontinuidad de la multiplicidad de $\mathcal{O}$ a lo largo de la subvariedad dada por p (|17| 2.1).

(ii) La curva genérica $\mathcal{O}_u$ admite como desarrollo el de Φ_u, obtenido, por la extensión de la parametrización, y de (I-3.4) se deduce que $E(\mathcal{O}_o) = E(\mathcal{O}_u)$.

<u>Proposición 2.3</u>. Sea $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$, con $A \in \hat{\mathcal{C}}$ regular y s la única sección singular, tal que es equisingular ES1, entonces $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ es equisingular ES3.

<u>Demostración</u>.

Supongamos que se verifica la definición de ES1 para $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$, entonces construiremos un desarrollo de H-N para $\mathcal{O}$ relativo a la sección s con lo que se verificará ES3.

(i) Veamos que $\mathcal{O}$ admite una parametrización relativa a la sección s. En efecto:

Sea m el ideal maximal de $\mathcal{O}$, $p = (X_1,\dots,X_N)\mathcal{O}$ el ideal que define la sección s,

$\pi_1 : Bl_p(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O})$ es finito y además $\pi_1^{-1}(m) = \{m_1\}$, puesto que si hubiese más de un punto cerrado, $\mathcal{O}_o$ sería reducible.

Sea $x_1 \in \mathcal{O}$ tal que $m_1 \in \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}\left|\frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_N}{x_1}\right|)$, se verifica que $\pi_1\Big|_{\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}\left|\frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_N}{x_1}\right|)} : \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}\left|\frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_N}{x_1}\right|) \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}$ es finito, luego $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{O}\left|\frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_N}{x_1}\right|$ es finito y $\mathcal{O}\left|\frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_N}{x_1}\right|$ contiene a un solo maximal m_1 por tanto es local y completo (|34| pág. 276), y así $\mathcal{O}_1 \approx ((Bl_p(\mathcal{O}))_{m_1})^\wedge \approx \mathcal{O}\left|\frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_N}{x_1}\right|$.

Por verificarse ES1, si consideramos en $\mathcal{O}_1$ un ideal primo $p_1 = (x'_1,\ldots,x'_N)\mathcal{O}_1$ que yazca sobre p, $\mathcal{O}_1$ y p_1 verifican las mismas condiciones que $\mathcal{O}$ y p, y por tanto $\mathcal{O}_2 \approx \mathcal{O}_1\left|\frac{x'_2}{x'_1},\ldots,\frac{x'_N}{x'_1}\right|$

Obtenemos pues una cadena $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{O}_r$ donde cada $\mathcal{O}_i$ es local, completo y finito sobre $\mathcal{O}_{i-1}$, y $\mathcal{O}_r$ es regular, local, completo y finito sobre $\mathcal{O}$.

Veamos que $\mathcal{O}_r \approx A||t||$ con lo qual tendríamos una parametrización para $\mathcal{O}$. En efecto:

Tenemos que $A \approx k||u_1,\ldots,u_s||$, $\mathcal{O} \approx \frac{A||\underline{X}||}{I}$, como $\mathcal{O}_o$ es una curva, $\frac{\mathcal{O}}{m_A\mathcal{O}} \approx \mathcal{O}_o$ es de dimensión 1, y como x_1 es no divisor de cero en $\mathcal{O}_o$, x_1 no es divisor de cero en $\mathcal{O}$, y por tanto $\{u_1,\ldots,u_s,x_1\}$ es un sistema de parámetros de $\mathcal{O}$. Según (|34| pág. 293) la extensión $k||u_1,\ldots,u_r,x_1|| \subset \mathcal{O}$ es finita, es decir, $\mathcal{O}$ es finito sobre $A||x_1||$. Por tanto, $\mathcal{O}_r$ es finito sobre $A||x_1||$ y su dimensión es $s+1$, $\mathcal{O}_r$ es pues un anillo local regular y completo de dimensión $s+1$ y $A \subset \mathcal{O}_r$ y, de estas dos últimas condiciones deducimos que $\mathcal{O}_r \approx A||t||$.

Tenemos $\mathcal{O} \hookrightarrow A||t||$, $x_i \to \Phi_i \in A||t||$ con $i=1,\dots,N$. Entonces $\Phi = \{\Phi_1,\dots,\Phi_N\}$ es una parametrización de $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$.

En efecto:

Basta ver que si $\mathcal{O} \simeq \dfrac{A||\underline{X}||}{I}$ y $\mathcal{O}_o \approx \dfrac{k||\underline{X}||}{I_o}$ el siguiente diagrama de sucesiones exactas es conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A||\underline{X}|| & \xrightarrow{\Phi} & A||t|| \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & I_o & \longrightarrow & k||\underline{X}|| & \xrightarrow{\chi} & k||t||
\end{array}$$

donde Φ, χ son los morfismos definidos mediante las parametrizaciones Φ de $\mathcal{O}$ y χ de $\mathcal{O}_o$, respectivamente.

(ii) Vamos a construir un desarrollo de H-N para $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$, a partir de la parametrización Φ obtenida para $\mathcal{O}$.

El extendido de p es $p\mathcal{O}_1 = (x_1,\dots,x_N)\ \mathcal{O}\left|\dfrac{x_2}{x_1}, \dots, \dfrac{x_N}{x_1}\right| =$
$= x_1\ \mathcal{O}\left|\dfrac{x_2}{x_1}, \dots, \dfrac{x_N}{x_1}\right|$. Por otra parte, como $\mathcal{O} \simeq \mathcal{O}||x_1||\ |x_2,\dots,x_N|$ (II-2.1), es $\mathcal{O}_1 \simeq A||x_1||\ \left|\dfrac{x_2}{x_1}, \dots, \dfrac{x_N}{x_1}\right|$ y $p\mathcal{O}_1 \simeq x_1(A||x_1||\ \left|\dfrac{x_2}{x_1},\dots,\dfrac{x_N}{x_1}\right|)$.

Sea la imagen de $\dfrac{x_i}{x_1}$ en $A||t||$ $m_i' + a_i\ t^{r_i} + \dots$ donde $m_i' \in A$, tomamos el ideal $p_1 = (x_1, x_2', \dots, x_N')\mathcal{O}_1$ donde $x_i' = \dfrac{x_i}{x_1} - m_i'$ para $i \neq 1$, que es primo pues $\mathcal{O}_1$ y A son dominios de integridad, y además $p_1 \cap \mathcal{O} = p$. Tenemos pues

$$\begin{cases} x_2 = m_2'\ x_1 + x_i'\ x_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_N = m_N'\ x_1 + x_N'\ x_1 \end{cases}$$

que nos da la primera columna del desarrollo de H-N de $\mathcal{O}$.

Seguimos el mismo proceso para $\mathcal{O}_1$ y p_1 y obtenemos uno de los dos siguientes casos:

a) $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1 \left|\frac{x_2'}{x_1}, \ldots, \frac{x_N}{x_N'}\right|$, entonces hacemos $p_2 = (x_1, x_2'', \ldots$ $\ldots, x_N'')\mathcal{O}_2$ con $x_i'' = \frac{x_i'}{x_1} - m_i''$ donde la imagen de $\frac{x_i'}{x_1}$ en $A||t||$ es $m_i'' + b_i\, t^{s_i} + \ldots$ con $m_i'' \in A$. Tenemos entonces:

$$\begin{cases} x_2 = m_2'\, x_1 + m_2''\, x_1^2 + x_2''\, x_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_N = m_N'\, x_1 + m_N''\, x_1^2 + x_N''\, x_1 \end{cases}$$

b) $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1 \left|\frac{x_1}{x_j'}, \frac{x_2'}{x_j'}, \ldots, \frac{x_N'}{x_j'}\right|$, entonces hacemos $p_2 = (x_1', x_2'', \ldots$ $\ldots, x_j', \ldots, x_N'')\mathcal{O}_2$, con $x_1' = \frac{x_1}{x_j'} - m_1$, $x_i'' = \frac{x_i'}{x_j'} - m_i''$ con $i \neq 1, j$ y donde las imágenes de $\frac{x_1}{x_j'}, \frac{x_i'}{x_j'}$ en $A||t||$ son $m_1' + c_1\, t^{g_1} + \ldots$ y $m_i'' + c_i\, t^{g_i} + \ldots$ respectivamente, con $m_1', m_i'' \in A$. Tenemos entonces:

$$\begin{cases} x_2 = m_2'\, x_1 + x_2'\, x_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_N' = m_N'\, x_1 + x_N'\, x_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = m_2'\, x_j' + x_1'\, x_j' \\ x_2'' = m_2''\, x_j' + x_2''\, x_j' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{x}_j' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_N'' = m_N''\, x_j' + x_N''\, x_j' \end{cases},$$

Continuando el proceso vamos obteniendo un desarrollo de H-N para $\mathcal{O}$.

Vamos a determinar cuales serán las últimas filas del desarrollo:

Sea $p_{r-1} = (y_1, \ldots, y_N)\mathcal{O}_{r-1}$, hemos visto que

$\mathcal{O}_r = \mathcal{O}_{r-1} \left|\frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_N}{y_1}\right| \simeq A||t||$ luego existe $j, j=1,\dots,N$, con $y'_j = \frac{y_j}{y_1} = n_j + a_j t + \dots,$ con a_j unidad de A y $n_j \in A$. Por tanto las últimas filas del desarrollo según se desprende de su construcción (0-6) serán:

$$\begin{cases} y_1 = \sum\limits_{i\geq 1} a_{1i}\, y'^{\,i}_j \\ y'_2 = \sum\limits_{i\geq 1}^{\infty} a_{2i}\, y'^{\,i}_j \\ \vdots \\ \hat{y}'_j \\ \vdots \\ y'_N = \sum\limits_{i\geq 1} a_{Ni}\, y'^{\,i}_j \end{cases}$$

(iii) El conjunto de las expresiones obtenidas es un desarrollo de H-N para $\mathcal{O}$. Para comprobarlo veamos que su matriz asociada cumple la definición (I-3.1). En efecto:

Sea el desarrollo D hallado en (ii)

$$\begin{cases} Y = A_{o1}\, x_1 + \dots + A_{oh}\, x_1^h + Z_1\, x_1^h \\ \overline{Z}_1 = A_{11}\, z_1 + \dots + A_{1h}\, z_1^{h_1} + Z_2\, z_1^{h_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overline{Z}_s = \sum\limits_{i\geq 1} A_{si}\, z_s^i \end{cases}$$

Los elementos $x_1, z_1, \dots, z_s$ son series de $A||t||$, $x_1 = a_n t^n + a_{n+1} t^{n+1} + \dots$ y $z_j = a_{jn_i} t^{n_i} + a_{jn_i+1} t^{n_i+1} + \dots$ con a_n, a_{jn_i} unidades en $A||t||$ ya que

(a) Por hipótesis $\left(\frac{A||t||}{x_1 A||t||}\right)_{red} \approx A$ y como $\mathcal{O}_r \approx A||t||$ y $p_1 \mathcal{O}_r = x_1 \mathcal{O}_r$, se sigue que a_n es unidad en A y $x_1 = t^n(a_n + a_{n+1}t + \ldots)$, con $(a_n + a_{n+1} t + \ldots)$ unidad en $A||t||$. Esto nos dice además que Φ es equimúltiple pues $o(x_1) \leq o(x_i)$ y a_n es unidad, y también que $\Phi^1, \ldots, \Phi^{h-1}$ son equimúltiples.

(b) Por hipótesis $\frac{x_1}{z_1} = c_g\, t^g + c_{g+1}\, t^{g+1} + \ldots \in A||t||$ luego $a_n = c_g \cdot a_{1n_1}$ y por tanto a_{1n_1} es unidad en A. Análogamente esto nos dice que $\Phi^h, \ldots, \Phi^{h+h_1-1}$ son equimúltiples.

Siguiendo el proceso a_{jn_j} es unidad para todo j y Φ^g es equimúltiple para todo g.

Cada elemento $x_1, z_1, \ldots, z_s$ determina que fila de la matriz del desarrollo está marcada en cada caja. El primer elemento $\alpha_{jk} \neq 0$, después del 1 en la fila marcada j de la caja C_g es unidad ya que $z_g = z_{g+1}^{h_{g+1}}\, z_{g+2}^{h_{g+2}} \ldots z_i^{h_i}\,(\alpha_{jk}\, z_{i+1}^{h} + \ldots)$, y los coeficientes de los términos de menor grado de $z_g, z_{g+1}, \ldots, z_i, z_{i+1}$ como series en $A||t||$, son unidades, por lo visto anteriormente, y por tanto α_{jk} es unidad en A.

La sucesión de números determinada por el desarrollo D: $n, n_1, \ldots, n_s = 1$ (II-3.1) corresponde a la sucesión de multiplicidades de una curva alabeada, ya que por construcción corresponde a la sucesión de multiplicidades de $\mathcal{O}_o$ ó $\mathcal{O}_u$, pues la sucesión de transformados monoidales $\Phi, \Phi^1, \ldots, \Phi^s$ son equimúltiples.

Nota 2.4. Hemos probado que ES1 $\Longrightarrow$ ES2. Respecto del recíproco hemos de indicar lo siguiente:

Sea $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$ verificando ES2, con A regular y s la única sección singular, suponemos además que la característica del cuerpo base es 0. Por hipótesis $\mathcal{O}_o$ y $\mathcal{O}_u$ son irreducibles, y $e(\mathcal{O}_o) = e(\mathcal{O}_u)$ luego $e(\mathcal{O}_o) = e(\mathcal{O}) = e(\mathcal{O}_u)$ (|17| 2.1) por tanto si p es el ideal de s, $\frac{\mathcal{O}}{p} \approx A$ es regular y $\mathcal{O}$ es equimúltiple a lo largo de p.

Al construir la transformación monoidal de $\mathcal{O}$ con centro p la equimultiplicidad reporta las ventajas que veremos a continuación.

(i) Si $\tilde{\pi} : Bl_p(\mathcal{O}) \longrightarrow \text{Spec } \mathcal{O}$ es la transformación monoidal, se verifica que $\tilde{\pi}$ es finito. (|14|, proposición 1).

(ii) Existe un solo ideal maximal m_1 de $Bl_p(\mathcal{O})$ que yace sobre m. En efecto:

$\mathcal{O}$ equimúltiple a lo largo de p implica que si $A \approx k||u_1,\dots,u_s||$, el morfismo

$$\phi : \frac{Gr_p(\mathcal{O})}{m_A\ Gr_p(\mathcal{O})} \otimes k|u_1,\dots,u_s| \longrightarrow Gr_m(\mathcal{O})$$

tiene como núcleo un ideal nilpotente (|14| Teorema .3). (Si en vez de equimultiplicidad existe platitud normal, el morfismo es isomorfismo).

De esto deducimos que $\dim Gr_m(\mathcal{O}) = \dim \frac{Gr_p(\mathcal{O})}{m_A\ Gr_p(\mathcal{O})} \otimes k|u_1,\dots,u_s|$ y puesto que $\dim Gr_m(\mathcal{O}) = \dim \theta = \dim A+1 = s+1$, se tiene que la dimensión de $\frac{Gr_p(\mathcal{O})}{m_A\ Gr_p(\mathcal{O})}$ es 1.

Luego la fibra del cono normal $Gr_p(\mathcal{O})$ en el origen, $\dfrac{Gr_p(\mathcal{O})}{m_A\, Gr_p(\mathcal{O})}$ es un conjunto de rectas. Ahora bien, el cono tangente a $\mathcal{O}_o$, que es denso en dicha fibra, consta de una recta solamente, y así la fibra del cono normal es también una recta, y hay un solo ideal en $Bl_p(\mathcal{O})$ que yazca sobre m.

(iii) Existe un solo primo p_1 que yace sobre p, pues la transformación cuadrática de la curva genérica es única (II-1.11).

Así en una primera transformación monoidal vemos que se verifican las condiciones de la definición ES1, pero en una segunda transformación no podemos, en principio, asegurar lo mismo.

La condición de finitud del morfismo $\tilde{\pi}$ es equivalente a la equimultiplicidad (|14| teorema .3) y para garantizar ésta sólo contamos en la segunda transformación $\tilde{\pi}_1 : Bl_{p_1}(\mathcal{O}_1) \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_1$ con que su curva genérica $(\mathcal{O}_1)_u$, que es isomorfa a la transformada cuadrática de $\mathcal{O}_u$ (II-1.11), es tal que $e(\mathcal{O}_1)_u = e(\mathcal{O}_o)_1$, donde $(\mathcal{O}_o)_1$ es la transformada cuadrática de $\mathcal{O}_o$. Pero, en general, no podemos garantizar que la fibra específica de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_1 \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ sea precisamente $(\mathcal{O}_o)_1$, pues según se deduce del morfismo ϕ de (ii) pueden aparecer elementos nilpotentes sobre la fibra en m. Esto no sucedería si la deformación fuese normalmente plana a lo largo de p, pues en ese caso ϕ sería isomorfismo.

Si $\mathcal{O}$ es intersección completa estricta a lo largo de p, entonces Hermann y Orbanz |14| demuestran que $\mathcal{O}$ es normalmente plana a lo largo de p y, por lo tanto, en ese caso no sucedería lo anterior. Sin embargo, se necesitaría que esta condición fuese estable por transformaciones monoidales y los autores demuestran que no lo es y que desconocen por el momento bajo qué condiciones lo sería.

No hemos podido encontrar un contraejemplo de ES2 $\Longrightarrow$ ES1 debido a la dificultad de encontrar familias de curvas que presenten nilpotentes en la segunda transformación; y puesto que si existe una parametrización para la familia, existe resolución y ES2 $\Longrightarrow$ ES1 (IV-2.2), los posibles contraejemplos se han de buscar usando ecuaciones implícitas, que son casi imposibles de manejar. De todos modos, nuestra conjetura es ES2 $\not\Longrightarrow$ ES1.

CAPITULO IV

DEFORMACION VERSAL EQUISINGULAR

El objetivo de este capítulo es estudiar la existencia de una deformación versal equisingular de una curva algebroide irreducible $\mathcal{O}_0$. En el caso de curvas planas hay diversos criterios debidos a Wahl |33|, Nobile |23| y Campillo |10| todos ellos equivalentes pero que no son válidos cuando la dimensión de inmersión es superior a 2, puesto que en este caso se presentan serias dificultades al no coincidir las parametrizaciones de las deformaciones con las deformaciones de las parametrizaciones.

El capítulo está dividido en 2 secciones. En la primera de ellas construimos por un proceso inductivo un functor de deformaciones de una parametrización equisingulares ES3 y probamos que es prorrepresentable y liso.

En la segunda encontramos un representante del mismo, construyendo una deformación de una parametrización equisingular ES3 miniversal. Para ello nos basamos en la construcción de un desarrollo de H-N miniversal.

1. EXISTENCIA DE DEFORMACION UNIVERSAL EQUISINGULAR

En esta sección introduciremos, en primer lugar, las notaciones y criterios de prorrepresentabilidad de Schlessinger |26|, para después aplicarlos a probar la prorrepresentabilidad del functor $\overline{ES}$ de deformaciones equisingulares de una parametrización de una rama de curva alabeada $\mathcal{O}_o$. Hemos tenido especial cuidado en hacer constar la diferencia entre deformaciones de la parametrización y deformaciones de la curva, añadiendo en cada caso notas que precisan el comportamiento de los functores construidos cuando en vez de considerarlos con valores en la categoría de deformaciones de una parametrización de $\mathcal{O}_o$, los tomamos con valores en la categoría de deformaciones de $\mathcal{O}_o$ que admiten una parametrización.

Nota 1.1. Expondremos brevemente algunas definiciones y resultados en deformaciones sobre la categoría C de k-álgebras locales artinianas y completas, y cuyos morfismos son los homomorfismos de k-álgebras locales |26|, |32|.

1.1.1. Sea $\hat{C}$ la categoría de k-álgebras locales noetherianos y completas, y cuyos morfismos son los de k-álgebras. $C \hookrightarrow \hat{C}$ hace a C subcategoría completa de $\hat{C}$. Por otra parte si $R \in \hat{C}$ y m_R es el ideal maximal de R, $R/m_R^n \in C$ para todo $n \in \mathbb{N}$; este hecho indica que en cierta forma la inmersión $C \hookrightarrow \hat{C}$ es una retracción. Si $F : C \longrightarrow$ ((conjuntos)) es un functor, (podemos tomar en vez de ((conjuntos)) una categoría cualquiera) podemos extender F a $\hat{C}$ por $\hat{F}(R) = \varprojlim F(R/m_R^n)$. $\hat{F}$ extiende F en el sentido de que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & \hat{C} \arrow[dl, "\hat{F}"] \\ ((\text{conjuntos})) & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Si $R \in \hat{C}$, sea como es habitual $h_R : C \longrightarrow ((\text{conjuntos}))$ el morfismo definido por $h_R(A) = \mathrm{Hom}_k(R,A)$, se verifica que $\hat{F}(R) \simeq$ $\simeq \mathrm{Hom}(h_R, F)$.

Diremos que <u>(R,ξ) con $\xi \in \hat{F}(R)$ prorrepresenta a F</u> si el morfismo $h_R \to F$ inducido por ξ es un isomorfismo. En este caso diremos también que F es prorrepresentable o universal.

Obsérvese que si F es prorrepresentado por (R,ξ), <u>$\hat{F}$ es representado por (R,ξ)</u>.

Diremos que <u>F es miniversal</u> si existe un morfismo de functores $h_R \longrightarrow F$ tal que:

(i) Si $\rho : A' \to A$ es suprayectiva $h_R(A') \longrightarrow h_R(A) \times_{F(A)} F(A')$ es suprayectiva.

Diremos que F es versal (ó semiuniversal) si es miniversal y además verifica:

(ii) $h_R(k|\varepsilon|) \simeq F(k|\varepsilon|)$, donde $k|\varepsilon| = k|X|/(X^2)$. Llamaremos a $F(k|\varepsilon|)$ el espacio tangente a F.

1.1.2. Schlessinger da en |26| unos criterios para caracterizar los functores prorrepresentables y versales que consiste en lo siguiente. Si $\rho_1 : A' \to A$, $\rho_2 : A'' \to A$ son morfismos en C, existe una aplicación natural $(\alpha) : F(A' \times_A A'') \longrightarrow F(A') \times_{F(A)} F(A'')$, donde

$A' \times_A A''$ es el anillo de C formado por los pares (a', a'') con $a' \in A'$, $a'' \in A''$ tales que $\rho_1(a') = \rho_2(a'')$ y definidas la suma y el producto en coordenadas.

Consideramos las condiciones siguientes sobre F:

(H_1) Si $\rho_1 : A' \to A$ es pequeño (es decir, si ρ_1 suprayectivo y $(\ker \rho_1)$ principal), entonces (α) es suprayectiva.

(H_2) Si $A = k$, y $A' = k|\varepsilon|$, entonces (α) es biyección.

(H_3) El espacio tangente $F(k|\varepsilon|)$ es un espacio vectorial de dimensión finita.

(H_4) Si $\rho_1 : A' \to A$ es pequeño, entonces (α) es una biyección.

Diremos que:

(i) F es liso si $\rho_1 : A' \to A$ suprayectiva implica que $F(A') \longrightarrow F(A)$ es suprayectiva.

(ii) F tiene una buena teoría de deformación si F satisface (H_1) y (H_2).

(iii) F tiene una muy buena teoría de deformación si

F verifica (H_1), (H_2) y (H_4)

1.1.3. Si F es un functor tal que $F(k)$ es un solo elemento, F es versal si y sólo si se verifica (H_1), (H_2) y (H_3), y F es prorrepresentable si y sólo si se verifica (H_1), (H_2), (H_3) y (H_4).

<u>Notaciones 1.2.</u>

Dada la curva algebroide irreducible $\mathcal{O}_o$ se pueden considerar las siguientes categorias de deformaciones de $\mathcal{O}_o$

1.2.1. $\mathcal{L}$ cuyos objetos son las deformaciones $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A|$, con $A \in \hat{C}$ y cuyos morfismos son los de deformaciones tal como se definen en (I-1.2.2).

1.2.2. $\mathcal{H}$ cuyos objetos son las deformaciones de una parametrización X de $\mathcal{O}_o$, $|\Phi, X, A|$ con $A \in \hat{C}$, y cuyos morfismos son los de sus deformaciones asociadas.

1.2.3. $\mathcal{L}_H$ cuyos objetos son las deformaciones de $\mathcal{O}_o$ que admiten parametrización, es decir, $\mathcal{L}_H$ es la intersección de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{L}$.

1.2.4. En esta sección estudiaremos exclusivamente la categoría $\mathcal{H}$ que es en la que se puede probar la existencia de una deformación universal. En la próxima sección, y en el caso de cálculos efectivos, consideraremos un cuarto tipo de deformaciones, las de H-N.

<u>Nota 1.3</u>. Consideraremos dos functores de la categoría C en las categorías ((conjuntos)) y ((grupos)) definidos de la siguiente forma:

(i) Sea $\mathcal{O}_o$ una curva algebroide irreducible que admite como parametrización a $X = \{\phi_1,...,\phi_N\}$:

Para todo $A \in C$ definimos $H(A) = \{|\Phi, X, A| \in \mathcal{H}\}$. H es un functor con imágenes en ((conjuntos)) que recibe el nombre de <u>functor de las deformaciones de la parametrización X de</u> la curva $\mathcal{O}_o$.

Denotaremos a los elementos $|\Phi, \chi, A| \in H(A)$ por Φ ya que χ y A son fijos.

El carácter functorial de H resulta de lo siguiente:

Sean $\rho \in Hom_C(A',A)$, $|\Phi', \chi, A'| \in H(A')$ con $\Phi' = \{\Phi'_1,\ldots,\Phi'_N\}$ y $\Phi'_j = \sum_{i\geq o} a'_i t^i$, $a'_i \in A'$ entonces definimos $\rho^* : H(A') \longrightarrow H(A)$ por $\rho^*(\Phi') = \Phi$ donde $\Phi = \{\Phi_1,\ldots,\Phi_N\}$ y $\Phi_j = \sum_{i\geq o} \rho(a'_i)t^i$ (por ser ρ homomorfismo de k-álgebras es $res\ (\Phi_j) = res\ (\Phi'_j) = \rho_j$).

Si restringimos H a $H \cap L$ es decir para todo $A \in C$, $H(A)$ es el morfismo de deformaciones de $\mathcal{O}_o$ que admiten parametrización, el morfismo ρ^* lleva la deformación asociada a Φ' sobre la deformación asociada a Φ, pues el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A||\underline{X}|| & \xrightarrow{\quad\Phi\quad} & A||t|| \\ \uparrow & & \uparrow \\ A'||\underline{X}|| & \xrightarrow{\quad\Phi'\quad} & A'||t|| \end{array}$$

es conmutativo e induce un morfismo $\Phi^* : \mathcal{O}' = \dfrac{A'||\underline{X}||}{(\ker \Phi')} \to \mathcal{O} = \dfrac{A||\underline{X}||}{(\ker \Phi)}$, es decir, si llamamos H_D a la correspondencia definida sobre la categoria C, $H_D(A) = \{$Deformaciones de $\mathcal{O}_o$ sobre A que admiten parametrización$\}$, entonces H_D es también un functor.

(ii) El segundo functor de C en ((grupos)) se define así:

$G(A) = \{\psi \in Aut_A\ A||\underline{X}||$ tales que $\psi/k||\underline{X}|| = 1_{k||\underline{X}||}\}$. Obviamente $G(A)$ es un grupo y G es un functor.

Veremos más adelante que los functores H y G tienen una muy buena teoría de deformación y son lisos, que G actúa sobre H y el functor cociente $\overline{H}$ de H por la acción natural de G es versal y liso.

Proposición 1.4. H verifica (H_1), (H_2), (H_4) y es liso.

Demostración.

(i) $(\alpha) : H(A' \times_A A") \longrightarrow H(A') \times_{H(A)} H(A")$ está definida como sigue:

Sea $\Phi \in H(A' \times_A A")$, $\Phi_j = \sum_{i \geq o} (b_i, c_i) t^i$, $j=1,\ldots,N$, $(b_i, c_i) \in A' \times_A A"$, entonces $\alpha(\Phi) = (\Phi', \Phi")$, donde $\Phi'_j = \sum_{i \geq o} b_i\, t^i$, $\Phi"_j = \sum_{i \geq o} c_i\, t^i$ y $(\Phi', \Phi") \in H(A') \times_{H(A)} H(A")$ ya que como $\rho_1(b_i) = \rho_2(c_i)$, entonces $\rho_1^*(\Phi'_j) = \rho_2^*(\Phi"_j)$.

Veamos que la aplicación (α) es biyectiva y, por tanto, verifica (H_1), (H_2) y (H_4). En efecto:

(α) es suprayectivo, dada $(\Phi', \Phi") \in H(A') \times_{H(A)} H(A")$ con

$\Phi'_j = \sum_{i \geq o} b_i\, t^i$ $\Phi"_j = \sum_{i \geq o} c_i t^i$, $b_i \in A'$, $c_i \in A"$ definimos, para todo $j=1,\ldots,N$, $\Phi_j = \sum_{i \geq o} (b_i, c_i) t^i$, y

$\Phi \in H(A' \times_A A")$ ya que $\rho_1(b_i) = \rho_2(c_i)$ por ser $\rho_1^*(\Phi') = \rho_2^*(\Phi")$ (α) es evidentemente inyectivo.

(ii) Si suponemos $\rho_1 : A' \to A$, suprayectivo, entonces $\rho_1^* : H(A') \longrightarrow H(A)$ lo es también, por construcción, y H es liso.

<u>Proposición 1.5</u>. El espacio tangente $H(k|\varepsilon|)$ es un espacio vectorial sobre k.

<u>Demostración.</u>

En general puede verse en (1.3 |32|). En este caso

$$H(k|\varepsilon|) = \{\Phi = \phi + \varepsilon\,\psi \mid \psi = \{\psi_1,\ldots,\psi_N\},\ \phi = \{\phi_1,\ldots,\phi_N\},$$
$$\psi_j, \phi_s \in k||t||\}$$

se puede considerar como espacio vectorial sobre k de base $\{V_{ij}\}$ con $j=1,\ldots,N$, $i=o,\ldots,\infty$ siendo $V_{ij} = t^i$, ya que para todo j $\Phi_j = \phi_j + \varepsilon\psi_j$ depende solamente de ψ_j.

<u>Notas 1.6</u>.

1.6.1. G satisface (H_1), (H_2), (H_4) y es liso. El espacio tangente a G es $G(k|\varepsilon|) = \mathrm{Der}_k\ (k||X||,\ldots,k||X||)$.

<u>Demostración</u>. (|32|, 1.3.1).

1.6.2. Los elementos de $G(A)$ son de la forma siguiente:

Dado $\sigma \in G(A)$, $\sigma : A||\underline{X}|| \longrightarrow A||\underline{X}||$, donde $\sigma(X_j) = a_o +$ $+ a_1X_j + g(X)$ con $a_o \in A$, a_1 unidad en A y $g(X) = b_oX_1 +\ldots$ $\ldots + \hat{b_j}X_j + \ldots + b_NX_N + g'(\underline{X})$, con $o(g') \geq 2$.

<u>Nota 1.7</u>. G actúa sobre H mediante un morfismo

$G \times H \longrightarrow H$ definido por la aplicación $G(A) \times H(A) \longrightarrow H(A)$ que asocia a (σ,Φ) la deformación $(\Phi \circ \sigma)$. Denotamos por $\overline{H}$, el cociente de H por la acción de G, entonces dado $\overline{\Phi} \in \overline{H}(A)$:

$\Phi' \in \overline{\Phi}$ si y sólo si existe $\sigma \in G(A)$, $\sigma : A||X|| \longrightarrow A||\underline{X}||$

que induce la identidad en $k||\underline{X}||$ y tal que $\Phi' = \Phi\sigma$, es decir, si y solo si las deformaciones $\mathcal{O} \approx \frac{A||\underline{X}||}{(\ker \Phi)}$ y $\mathcal{O}' \approx \frac{A||\underline{X}||}{(\ker \Phi')}$ son equivalentes.

<u>Proposición 1.8</u>. $\overline{H}$ tiene una muy buena teoría de deformación y es liso.

<u>Demostración</u>.

(i) $\overline{H}$ satisface (H_1), (H_2) y es liso, ya que H los satisface y G también, junto con (H_4) (|32|, 1,1.6).

(ii) $\overline{H}$ verifica (H_4), es decir (α) biyectiva. En efecto:

a) (α) es suprayectiva pues se verifica (H_1)

b) Comprobemos que (α) es inyectiva cuando ρ_1 es pequeña.

Sean $\overline{\Phi}, \overline{\psi} \in \overline{H}(A' \times_A A")$, tales que $(\alpha)(\overline{\psi}) = (\overline{\psi}', \overline{\psi}")$, $(\alpha)(\overline{\Phi}) = (\overline{\Phi}', \overline{\Phi}")$, y $(\overline{\Phi}', \overline{\Phi}") = (\overline{\psi}', \overline{\psi}")$, entonces existen $\sigma' \in G(A)$, $\sigma" \in G(A")$ con $\Phi' = \psi'\sigma'$, $\Phi" = \psi"\sigma"$.

Sean $\sigma'(X_j) = b_o + b_1 X_j + g_1(\underline{X})$, $\sigma"(X_j) = c_o + c_1 X_j + g_2(\underline{X})$; asociamos a σ', $\sigma"$ un elemento σ definido para todo $j=1,\dots,N$ por $\sigma(X_j) = (b_o, c_o) + (b_1, c_1) X_j + (g_1(\underline{X}), g_2(\underline{X}))$.

Por definición de σ se verifica que $\Phi = \psi\sigma$, luego para que $\overline{\Phi} = \overline{\psi}$ basta con comprobar que $\sigma \in G(A' \times_A A")$.

Como G verifica (H_4) para comprobar que $\sigma \in G(A' \times_A A")$ basta probar que $(\sigma', \sigma") \in G(A') \times_{G(A)} G(A")$, es decir, que $\rho_1^*(\sigma') = \rho_2^*(\sigma") \in G(A)$. Vamos a comprobar esto último.

Por definición $\rho_1^*(\Phi') = \rho_2^*(\Phi") = \rho_2^*(\psi"\ \sigma") = \rho_2^*(\psi")\ \ \rho_2^*(\sigma")$, y $\rho_1^*(\Phi') = \rho_1^*(\psi'\ \sigma') = \rho_1^*(\psi')\ \ \rho_1^*(\sigma')$, donde para cada $j=1,\dots,N$, es $\rho_1^*(\sigma')(X_j) = \rho_1(b_o) + \rho_1(b_1)X_j + \rho_1^*(g_1(\underline{X}))$ y

$\rho_2^*(\sigma")(X_j) = \rho_2(c_o) + \rho_2(c_1)X_j + \rho_2^*(g_2(\underline{X}))$ entonces

$$\text{(I)}\qquad \rho_1^*(\psi')(\rho_1^*(\sigma')(X_j)) = \rho_1(b_o) + \rho_1(b_1)\cdot\sum_{i\geq o} a_i\ t^i + {} + \rho_1^*(g_1(z_1,\dots,z_N))$$

$$\text{(II)}\qquad \rho_2^*(\psi")(\rho_2^*(\sigma")(X_j)) = \rho_2(c_o) + \rho_2(c_1)\cdot\sum_{i\geq o} a_i\ t^i + {} + \rho_2^*(g_2(z_1,\dots,z_N))$$

con $z_j = \rho_1^*(\psi') = \rho_2^*(\psi") = \eta_j \in A||t||$ y $\eta = \{\eta_1,\dots,\eta_N\}$ deformación de la parametrización χ.

Como (I) y (II) coinciden como series en $A||t||$ se deduce que $\rho_1(b_o) = \rho_2(c_o)$, $\rho_1(b_1) = \rho_2(c_1)$ y $\rho_1^*(g_1(z_1,\dots,z_N)) -$ $- \rho_2^*(g_2(z_1,\dots,z_N)) \in (\ker\ \eta)$ y como, por definición, $\rho_1^*(g_1(z_1,\dots,z_N)) - \rho_2^*(g_2(z_1,\dots,z_N)) + m_A\ \mathcal{O} = 0$ donde $\mathcal{O} \approx \dfrac{A||\underline{X}||}{(\ker\ \eta)}$ y $(\ker\ \psi) \cap m_A\ \mathcal{O} = 0$, entonces $\rho_1^*(g'(z_1,\dots,z_N)) =$ $= \rho_2^*(g'(z_1,\dots,z_N))$.

<u>Proposición 1.9</u>. $\overline{H}(k|\varepsilon|)$ es espacio vectorial de dimensión finita sobre k, es decir $\overline{H}$ verifica (H_3).

<u>Demostración</u>.

Sea c el orden del conductor de $\mathcal{O}_o$, sea $\overline{\Phi} \in \overline{H}(k|\varepsilon|)$, con $\Phi_j = \phi_j + \varepsilon\ \xi_j$, donde $\xi_j \in k||t||$. Entonces, una base de $\overline{H}(k|\varepsilon|)$

es $\{v_{ij}\}$ $i=1,\dots,c-1$, $j=0,\dots,N$ con $v_{ij} = t^j$. En efecto:

(i) $\Phi_j - \phi_j = \varepsilon\,\xi_j = \varepsilon(a_o + a_1 t + \dots + a_{c-1}\, t^{c-1}) + \varepsilon\,\eta_j(t)$, con $o(\eta_j(t)) \geq c$. Sea $\psi_j = \Phi_j - \varepsilon\,\eta_j$ y formemos la deformación $\overline{\psi}$ con $\psi = \{\psi_1,\dots,\psi_N\}$. Vamos a comprobar que $\overline{\psi} = \overline{\Phi}$. Para todo j, $j=1,\dots,N$, $\eta_j(t) \in t^c\, k||t||$, y por ser c el conductor de $\mathcal{O}_o \approx \dfrac{k||X||}{I_o}$ existe $Z_j = g_j(\underline{X}) \in k||\underline{X}||$, con $z_j = Z_j + I_o$ tal que $\phi(z_j) = \eta_j(t)$.

Sea $\sigma \in G(k|\varepsilon|)$ constituido por $\sigma(X_j) = X_j - \varepsilon\, g_j(\underline{X})$, σ verifica que $\Phi\sigma(X_j) = \Phi_j - \varepsilon g_j(\Phi_1,\dots,\Phi_N) = \psi_j + \varepsilon\eta_j - \varepsilon g_j(\phi_1,\dots,\phi_N) - \varepsilon^2(\quad) = \psi_j$, como $\varepsilon^2 = 0$, y tenemos que $\overline{\psi} = \overline{\Phi}$.

(ii) Deducimos de (i) que, en este caso, es $\widetilde{H}(k|\varepsilon|) = \{\phi + \varepsilon\,\psi \,|\, \psi_j \in k||t||$ con $O(\psi_j) < c\}$ y por tanto la base definida en la proposición 1.5 queda reducida, en este caso, a $\{v_{ij}\}$, con $v_{ij} = t^i$ $i=0,\dots,c-1$, $j=1,\dots,N$.

Corolario 1.10. El morfismo $\overline{H}$ es prorrepresentable y liso.

Nota 1.11. En orden a probar la existencia de la deformación universal de $\mathcal{O}_o$, precisamos refinar los functores anteriores, considerando las deformaciones de parametrizaciones equimúltiples en la forma en que las hemos definidos en (I-4.9).

Construimos un functor de $\mathcal{C}$ en la categoría de conjuntos por: para todo $A \in \mathcal{C}_1$ $C(A) = \{|\Phi, \chi, A, s| \;|\; |\Phi, \chi, A| \in \mathcal{H}$ y es equimúltiple a lo largo de su sección natural $s\}$, a E le llamaremos functor de deformaciones equimúltiples de la parametrización χ de $\mathcal{O}_o$.

El functor E actúa en los morfismos de C como sigue. Dada $\rho_1 : A' \to A$ la aplicación $\rho_1^* : E(A') \to E(A)$ es la restricción a E de la definida para H. En efecto:

Sea $|\Phi', \chi, A', s'| \in E(A')$. Si la multiplicidad de χ es $e(\chi) = n$ existe un índice entre $\{1,\dots,N\}$, que supondremos 1, tal que para $j \neq 1$, $O(\Phi_j' - m_j') \geq n$ y $\Phi_1' = m_1' + a_1' t^n + a_2' t^{n+1} + \dots$, donde $a_1' \in A'$ es unidad. La imagen de Φ' por $\rho_1^* : E(A') \longrightarrow E(A)$ es una deformación $|\Phi, \chi, A, s|$ definida por $\Phi_j = \rho_1^*(\Phi_j') = \rho_1^* (\sum_{i \geq o} a_i' t^i) = \sum_{i \geq o} \rho_1(a_i) t^i$, y por ser ρ_1 homomorfismo de k-álgebras, es equimúltiple.

Proposición 1.12. E tiene una muy buena teoría de deformación y es liso.

Demostración.

En vista de como actúa ρ_1^*, se puede comprobar que E verifica en este caso (H_1), (H_2), (H_4) y además es liso, análogamente a como lo hicimos para H.

Notas 1.13.

1.13.1. La acción de G sobre H induce una actuación functorial sobre E definida por $\sigma|\Phi, \chi, A, s| = |\Phi\sigma, \chi, A, s\sigma^{-1}|$ puesto que la sección $s\sigma^{-1}$ es equimúltiple para la deformación $\Phi\sigma$.

1.13.2. Como indicamos al principio s es la sección natural asociada a la deformación. Denotemos a la sección trivial con T, se veri fica que existe un $\sigma \in G(A)$ tal que $|\Phi\sigma, \chi, A, T|$ es equimúltiple.

En efecto: Sea $s = (X_1-m_1,\ldots,X_N-m_N)A||\underline{X}||/(\ker \Phi)$ entonces basta con tomar $\sigma : A||\underline{X}|| \longrightarrow A||\underline{X}||$ definido por $\sigma(X_j) = X_j-m_j$.

1.13.3. Consideremos el morfismo <u>$\mu : E \to H$ que olvida la sección</u> que asocia a $|\Phi, \chi, A, s| \longrightarrow |\Phi, \chi, A|$. Dado que la sección s está asociada naturalmente a Φ el morfismo μ es inyectivo. Además la actuación de G conmuta con μ es decir el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
G \times E \arrow[r] \arrow[d, "1_G \times \eta"'] & E \arrow[d, "\mu"] \\
G \times H \arrow[r] & H
\end{tikzcd}$$

<u>Nota 1.14</u>. Consideremos ahora el functor en C, <u>E^2 de las deformaciones de una parametrización χ equimúltiple y con su transformado monoidal a lo largo de la imagen de la sección natural equimúltiple</u>.

Sea $|\Phi, \chi, A, s|$, denotemos a su transformado monoidal con centro la imagen de s (II-2), por $|Bl_s(\Phi), \chi_1, A, s_1|$, donde χ_1 es la transformada cuadrática de χ, $Bl_s(\Phi)$ es la parametrización del transformado monoidal y s_1 su sección natural.

Definimos E^2 asociando a cada $A \in C$ $E^2(A) = \{|\Phi, \chi, A, s, s_1| \mid |\Phi, \chi, A, s| \in E(A)$ y $|Bl_s(\Phi), \chi_1, A, s_1|$ equimúltiple$\}$.

<u>Proposición 1.15</u>. El functor E^2 tiene una muy buena teoría de deformación y es liso.

Demostración.

(i) $(\alpha) : E^2(A' \times_A A'') \longrightarrow E^2(A') \times_{E^2(A)} E^2(A'')$ es biyectiva con lo que se verifica (H_1), (H_2) y (H_4). En efecto, (α) es biyectiva para E luego para cada par $(|\Phi', \chi, A', s', s_1'|, |\Phi'', \chi, A'', s'', s_1''|) \in E^2(A') \times_{E^2(A)} E(A'')$, existe un único $|\Phi^*, \chi, (A' \times_A A''), s^*| \in E(A' \times_A A'')$, vamos a comprobar que sucede lo mismo para las secciones s_1', s_1''.

Las deformaciones Φ', Φ'' estan dadas por

$$\begin{cases} \Phi_1' = m_1' + b_{o1}t^n + \sum\limits_{i>o} b_{i1}t^{n+i}, & \text{con } b_{o1} \text{ unidad en } A' \\ \Phi_j' = m_j' + \sum\limits_{i\geq o} b_{ij}\, t^{n+i}, & \text{para } j=2,\ldots,N, \quad m_j', b_{ij} \in A' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_j'' = m_1'' + c_{o1}t^n + \sum\limits_{i>o} c_{i1}t^{n+i}, & \text{con } c_{o1} \text{ unidad en } A'' \\ \Phi_j'' = m_j'' + \sum\limits_{i\geq o} c_{ij}\, t^{n+i}, & \text{para } j=2,\ldots,N, \quad m_j'', c_{ij} \in A'' \end{cases}$$

verificándose que si $\rho_1 : A' \to A$, $\rho_2 : A'' \to A$ entonces $\rho_1(b_{ij}) = \rho_2(c_{ij}) \in A$, $\rho_1(m_j') = \rho_2(m_j'') \in A$.

De lo anterior se deduce que se puede definir Φ^* por

$$\begin{cases} \Phi_1^* = (m_1', m_1'') + (b_{o1}, c_{o1})t^n + \sum\limits_{i>o} (b_{i1}, c_{i1})t^{n+1} \\ \Phi_j^* = (m_j', m_j'') + \sum\limits_{i\geq o} (b_{ij}, c_{ij})t^{n+i}, \quad j=2,\ldots,N. \end{cases}$$

Vamos a comprobar que para cada par de secciones (s_1', s_1'') de elementos de $E^2(A') \times_{E^2(A)} E^2(A'')$ existe una única sección s_1^* de

$Bl_{s^*}(\Phi^*)$ con $\Phi^* \in E(A' \times_A A'')$ determinada por dicho par.

En efecto, sean $Bl_{s'}(\Phi') = \psi' = \{\psi'_1,\ldots,\psi'_N\}$, $Bl_s(\Phi'') = \psi'' = \{\psi''_1,\ldots,\psi''_N\}$, con

$$\{\psi'_1 = \Phi'_1 - m'_1,\quad \psi'_j = \frac{\Phi'_j - m'_j}{\Phi'_1 - m'_1} = \frac{\sum_{i\geq o} b_{ij}\, t^i}{b_{o1} + \sum_{i>o} b_{i1}\, t^i},\quad j=2,\ldots,N\}$$

$$\{\psi''_1 = \Phi''_1 - m''_1,\quad \psi''_j = \frac{\Phi''_j - m''_j}{\Phi''_1 - m''_1} = \frac{\sum_{i\geq o} c_{ij}\, t^i}{c_{o1} + \sum_{i>o} c_{i1}\, t^i},\quad j=2,\ldots,N\}$$

y las secciones respectivas s'_1, s''_1 son

$$s'_1 = (X_1,\ X_2 - b_{o2}\, b_{o1}^{-1},\ldots,X_N - b_{oN}\, b_{o1}^{-1})\ A||\underline{X}||/(\ker\psi')$$

$$s''_1 = (X_1, X_2 - c_{o2}\, c_{o1}^{-1},\ldots,X_N - c_{oN}\, c_{o1}^{-1})\ A||\underline{X}||/(\ker\psi'')$$

De manera natural podemos construir $\psi^* = Bl_{s^*}(\Phi)$ a partir de $Bl_{s'}(\Phi')$ y $Bl_{s''}(\Phi'')$ y nos dará una sección $s^* = (X_1,X_2 - (b_{o2}\, b_{o1}^{-1},\ c_{o2}\, c_{o1}^{-1}),\ldots,X_N - (b_{oN}\, b_{o1}^{-1},\ c_{oN}\, c_{o1}^{-1}))A||\underline{X}||/$ $/(\ker\psi^*)$ que es única por construcción. En vista de lo cual tenemos la deformación $|\Phi^*,\ \chi,(A' \times_A A''),\ s^*,\ s^*_1|$ única y (α) es biyectivo.

(ii) E^2 es liso. En efecto:

Sea $\rho_1 : A' \to A$ suprayectivo, dado $|\Phi,\ \chi,\ A,\ s,\ s_1| \in E^2(A)$ podemos construir trivialmente un elemento de $E^2(A')$ que sea imagen de él por ρ^*_1, y E^2 es liso.

<u>Notas 1.16.</u>

1.16.1. Como antes existe una actuación functorial de G en E^2 y podemos definir el functor cociente $\overline{E}^2$.

1.16.2. Dada $|\Phi, \chi, A, s, s_1| \in E^2(A)$ existe un $\sigma \in G(\Lambda)$ tal que $\sigma|\Phi, \chi, A, s, s_1| = |\Phi\sigma, \chi, A, T; T|$ es decir se pueden trivializar las dos secciones s, s_1 a la vez. Para ello si consideramos las notaciones anteriores basta tomar $\sigma(X_1) = X_1 - m_1$, $\sigma(X_j) = X_j - m_j - a_{o1}^{-1} a_{oj} X_1$, $j=2,\ldots,N$.

1.16.3. El morfismo $\mu_2 : E^2 \to E$ que olvida la sección es obviamente inyectivo. Además como en la nota 1.13.2 μ_2 conmuta con la acción de G.

Nota 1.17. Definiremos ahora, inductivamente, el functor E^r en C. Supongamos definido E^i, junto con el morfismo que olvida las secciones $\mu_i\ E^i \longrightarrow E^{i-1}$, para todo i, $1 \leq i < r$. Entonces para todo $A \in C$, $E^r(A) = \{|\Phi, \chi, A, s_{r-1}, s_r| \mid |\Phi, \chi, A, s_{r-1}| \in E^{r-1}(\Lambda)$ y $|Bl_{s_{r-1}}(\Phi^{r-1}), \chi_r, s_r|$ es equimúltiple$\}$, donde χ_r denota la transformada cuadrática r-ésima de χ y Φ^{r-1} la transformada monoidal (r-1)-ésima a través de las secciones $s, s_1,\ldots,s_{r-1}$.

Por analogía al caso de curvas, llamaremos a los soportes de las secciones s_i, $(X_1-m_1^i,\ldots,X_N-m_N^i)$, los entornos infinitesimales de Φ.

Proposición 1.18. El functor E^r tiene una muy buena teoría de deformación y es liso para todo r.

Demostración.

Por inducción en r, analogamente a como hicimos en E^2.

Nota 1.19. Análogamente a las notas 1.13 y 1.16 hay en este caso una actuación functorial de G sobre E^r, podemos definir el cociente de E^r por G, $\overline{E}^r$, y el morfismo $\mu_r : E^r \to E^{r-1}$ que olvida la sección es inyectivo, conmutando con la acción de G.

Sin embargo, si $r > 2$ no es posible trivializar simultáneamente todas las secciones $s, s_1, \ldots, s_r$.

Proposición 1.20. Existe un entero r tal que, para todo entero $i > o$ $\prod_{j=r+1}^{r+i} \mu_j : E^{r+i} \longrightarrow E^r$ es una biyección.

Demostración.

En efecto el transformado monoidal j-ésimo de Φ, Φ^j es tal que, res $(\Phi^j) = \chi_j$, siendo χ_j el transformado cuadrático j-ésimo de χ, (II-2). Ahora bien en un número finito r de pasos, $e(\chi_r) = 1$ (0-5), luego en r pasos Φ_r tendrá multiplicidad 1, y sus sucesivos transformados también la tendrán. Pero si la multiplicidad de la parametrización es 1, $\mathcal{O} \approx \dfrac{A||x||}{(\ker \Phi^r)} \approx A||t||$ y este resultado es estable por transformaciones sucesivas.

Definición 1.21. Llamaremos functor equisingular ES al functor E^r donde r es el mismo de la proposición anterior.

Notas 1.22.

1.22.1. De lo anterior se tiene que ES tiene una muy buena teoría de deformación y es liso.

1.22.2. El morfismo que olvida las secciones $\mu : ES \to H$ es inyec tivo y la acción de G conmuta con dicho functor.

1.22.3. Diremos que $|\Phi, \chi, A| \in H(A)$ es equisingular si pertenece a la imagen del morfismo $\mu : ES(A) \to H(A)$.

Sea el functor $\overline{ES}$, cociente de ES por la acción de G, entonces

<u>Proposición 1.23</u>. El functor $\overline{ES}$ es prorrepresentable y liso.

<u>Demostración</u>.

$\mu : ES \to H$ es inyectivo y conmúta con la acción de G. Entonces $\overline{\mu} : \overline{ES} \to \overline{H}$ es inyectivo, $\overline{H}$ es prorrepresentable y liso y ES tiene una muy buena teoría de deformación entonces $\overline{ES}$ es prorrepresentable y liso.

<u>Nota 1.24</u>. Podemos definir un functor similar al functor $\overline{ES}$, pero considerando deformaciones que admitan parametrización en lugar de deformaciones de una parametrización, pero por el mismo camino que hemos seguido con $\overline{ES}$ no podemos garantizar que este nuevo functor sea prorrepresentable, pues en general una parametrización no determina una deformación. No obstante hemos visto que este functor es prorrepresentable en la categoría más amplia H y no lo es en la $L \cap H$.

2. CONSTRUCCION DE LA DEFORMACION MINIVERSAL EQUISINGULAR

En esta segunda sección hacemos una construcción explícita de un representante del functor de deformaciones $\overline{ES}$ de una parametrización de $\mathcal{O}_o$. La herramienta para esta construcción es el desarrollo de H-N, y la construcción se basa en ampliar el desarrollo de la curva $\mathcal{O}_o$ al de la curva genérica más general posible con la misma sucesión de multiplicidades que $\mathcal{O}_o$. Lo cual se consigue ampliando la matriz del desarrollo de $\mathcal{O}_o$, a una matriz tan amplia como la del cierre de Arf de $\mathcal{O}_o$ y sustituyendo ciertos elementos de dicha matriz por indeterminadas de forma conveniente para que se mantenga la sucesión de multiplicidades.

Notaciones 2.1. Sea $\mathcal{O}_o$ una curva algebroide irreducible y denotemos por χ una parametrización de ella. Consideremos las siguientes categorías de deformaciones:

2.1.1. $\mathcal{L}_D$ cuyos objetos son las deformaciones $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A, s|$, com $A \in \hat{\mathcal{C}}$ y tales que admiten un desarrollo de Hamburger-Noether (I-3, 5.3) es decir deformaciones equisingulares ES3, y cuyos morfismos son los de deformaciones.

2.1.2. $\mathcal{D}$ cuyos objetos son los desarrollos de Hamburger-Noether $|\mathcal{O}, \mathcal{O}_o, A|$ con $A \in \hat{\mathcal{C}}$, y morfismos los de sus deformaciones asociadas.

Las categorías $\mathcal{L}_D$ y $\mathcal{D}$ son subcategorías de las categorías $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ respectivamente definidas en la sección anterior.

2.1.3. La deformación asociada a un desarrollo $|D, \mathcal{O}_o, A| \in \mathcal{D}$ no es en general una deformación en el sentido en que la definimos en el capítulo I, pues al igual que sucede con las deformaciones de una parametrización pueden aparecer, al hallar la fibra específica, elementos nilpotentes, como muestra el siguiente ejemplo:

Sea el desarrollo $|D, \mathcal{O}_o, A|$ con $A = k||u||$ y D dado por

$$\begin{cases} x_2 = x_1 z_1 \\ x_3 = x_1 z_2 \end{cases} , \qquad \begin{cases} x_1 = z_1^4 \\ z_2 = u z_1^3 \end{cases}$$

La parametrización asociada a D es $\Phi = \{\Phi_1 = t^4, \ \Phi_2 = t^5, \ \Phi_3 = ut^7\}$, que es la del ejemplo (I-2.2) que como ya vimos verifica que su deformación asociada no es propiamente una deformación.

2.1.4. Consideremos un functor HN, de $\hat{C}$ en la categoría de conjuntos que asocia a cada $A \in \hat{C}$, $HN(A) = \{|D, \mathcal{O}_o, A| \in \mathcal{D}\}$. A dicho functor lo denominaremos <u>functor de los desarrollos de Hamburger-Noether</u>. Los elementos de $HN(A)$, $|D, \mathcal{O}_o, A|$, los denotaremos por D, ya que A y $\mathcal{O}_o$ son fijos.

Dado un morfismo en $\hat{C}$, $\rho : A' \to A$, la aplicación $\rho^* : HN(A') \to HN(A)$ se define como sigue: si $D' \in HN(A')$ tiene como matriz (a'_{ij}), $\rho^*(D')$ es el desarrollo que tiene como matriz $(\rho(a'_{ij}))$. Por ser ρ homomorfismo de k-álgebra, conserva las unidades y por tanto la matriz corresponde a un desarrollo D, que tiene como curva específica a $\mathcal{O}_o$, es decir un elemento de $HN(A)$. Además se verifica que la imagen de la parametrización asociada a D' es la parametrización asociada a D. En efecto, sea $\Phi' = \{\Phi'_1, \ldots, \Phi'_N\}$ la parametrización asociada a D', cada $\Phi'_i = \sum_{i\geq o} b'_i t^i$ donde, por construcción, cada b'_i es sumas y productos en número finito de elementos a'_{ij} de la matriz D. Análogamente $\Phi = \{\Phi_1,\ldots,\Phi_N\}$ con $\Phi_i = \sum_{i\geq o} b_i t^i$ y, por construcción, $\rho(b'_i) = b_i$.

2.1.5. El functor G definido en la sección anterior actúa sobre HN. Denotaremos por $\overline{HN}$ al cociente de $\overline{HN}$ por la acción de G. Se verifica que $D' \in \overline{D}$ con $\overline{D} \in HN(A)$ si y sólo si existe un $\sigma \in G(A)$ tal que $D' = D\sigma$ es decir si y solo si los desarrollos son equivalentes (I-3,5.1) es decir sus parametrizaciones asociadas lo son.

2.1.6. Cada desarrollo $|D, \mathcal{O}_o, A| \in \mathcal{D}$ se puede elevar a un desarrollo $|D', \mathcal{O}_o, A'| \in \mathcal{D}$, donde A' es regular. En efecto: Sea $A \approx k||u_1,\ldots,u_r||/J$ entonces si $A' = k||u_1,\ldots,u_r||$, el homomorfismo $\rho : A' \to A$ es suprayectivo, y podemos considerar un desarrollo D' que tenga como matriz (a'_{ij}) tal que $(\rho(a'_{ij}))$ sea la matriz de D, es decir su imagen por ρ^* sea D.

No sucede lo mismo con las deformaciones que admiten desarrollos de H-N ya que el desarrollo elevación del lado no nos determina en general una deformación, según hemos visto en 2.1.3.

<u>Proposición 2.2</u>. El functor $\overline{HN}$ coincide con el functor $\overline{ES}$.

<u>Demostración</u>.

(i) Consideremos el desarrollo $|D, \mathcal{O}_o, A| \in HN(A)$. Vamos a comprobar que la deformación de la parametrización asociada $|\Phi, \chi, A| \in$

$\in ES(A)$, definido en la sección anterior.

$|\Phi, \chi, A|$ es equimúltiple (I-4.9). La transformada monoidal de $|D, \mathcal{O}_o, A|$ nos da un desarrollo D^1 que tiene como parametrización asociada $|\Phi^1, \chi^1, A|$, con Φ^1 transformada monoidal de Φ y χ^1 transformada cuadrática de χ (II-2.2) y de la expresión de D_1 se sigue que Φ^1 es equimúltiple (II-2.2).

Estamos pues en un proceso inductivo. Tenemos $D, D^1, \ldots, D^i, \ldots$ desarrollos de H-N y sus deformaciones asociadas $\Phi, \Phi^1, \ldots, \Phi^i, \ldots$ tales que D^i es el transformado monoidal de D^{i-1}, Φ^i el transformado monoidal de Φ^{i-1}, y Φ^i es equimúltiple para todo i.

Veamos ahora que existe un s tal que Φ^s es de multiplicidad 1 y por tanto $\Phi \in ES(A)$. En efecto: de la expresión del desarrollo de D^i en función de D (II-2) se deduce que en un número finito de pasos s, D^s tiene como desarrollo $\overline{Z}_r = \sum_{1\leq i\leq\infty} A_{ri}\, z_r^i$ y su deformación asociada es $\Phi^r = \begin{cases} z_r = t \\ z_{rj} = \sum_{1\leq i\leq\infty} a_{ri,j}\, t^i \end{cases}$ que tiene multiplicidad 1.

(ii) Sea una deformación $|\Phi, \chi, A| \in ES(A)$, vamos a construir un desarrollo de H-N para Φ.

Sea para $j=1,\ldots,N$, $\Phi_j = m_j + \sum_{i\geq n} b_{ji}\, t^i$, $m_j, b_{ji} \in A$. La transformada monoidal de Φ es $\Phi^1 = \{\Phi_1 - m_1, \frac{\Phi_2-m_2}{\Phi_1-m_1}, \ldots, \frac{\Phi_N-m_N}{\Phi_1-m_1}\}$ (II-2.2), y su sección natural tiene como soporte $(X_1, X_2 - b_{2n}\, b_{1n}^{-1}, \ldots$ $\ldots, X_n - b_{Nn}\, b_{1n}^{-1})$. Un desarrollo de H-N para Φ es el que tiene como matriz (a_{ij}) la siguiente:

La primera columna de (a_{ij}) es $\begin{pmatrix} 1 \\ b_{2n}\, b_{1n}^{-1} \\ \vdots \\ b_{Nn}\, b_{1n}^{-1} \end{pmatrix}$, el resto de las columnas se obtienen de los soportes de las secciones naturales de $\Phi^2,\ldots,\Phi^s,\ldots$ de manera análoga a como hemos obtenido la primera.

Como se deduce de lo anterior, cada columna de la matriz del desarrollo de H-N de Φ nos determinará un punto infinitamente próximo de Φ (1.18).

(iii) De (i) y (ii) se sigue de $\overline{ES}$ y $\overline{HN}$ coinciden, pues el que dos desarrollos de H-N sean equivalentes, equivale a que sus parametrizaciones lo sean, y ésta es la equivalencia dada por el functor G.

La proposición anterior nos dice que el functor $\overline{HN}$ de $\mathcal{O}_o$ es prorrepresentable y liso. Pero aunque tenemos asegurada la existencia de un prorrepresentante $|D, \mathcal{O}_o, R|$ con $R = k||u_1,\ldots,u_s||$, no tenemos explícitamente su construcción.

A continuación construiremos un desarrollo que es un prorrepresentante, según la definición siguiente:

<u>Definición 2.3</u>. Llamaremos <u>desarrollo de H-N miniversal de $\mathcal{O}_o$</u> a un desarrollo $|D^*, \mathcal{O}_o, R|$, con $R \in \hat{C}$ que verifica: dados un desarrollo $|D', \mathcal{O}_o, A'|$ y los morfismos $\rho : A' \to A$ supráyectivo y $\eta : R \to A$ tales que $\eta^*(D^*)$ es equivalente a $\rho^*(D')$ entonces, existe un homomorfismo $\eta' : R \to A'$ tal que $\eta'^*(D^*)$ es equivalente a D'

<u>Lema 2.4</u>. Dada una curva algebroide irreducible $\mathcal{O}_o$, existe un subsemigrupo $S' \subset S'(\mathcal{O}_o)$ generado por $\{n_1, \beta_1 = hn + n_1,\ \beta_2 = hn + h_1\,\beta_1 + n_2, \dots, \beta_r = hn + h_1\,\beta_1 + \dots + h_{r-1}\,\beta_{r-1} + 1\}$, donde $E(\mathcal{O}_o) = (n,\overset{h}{\dots},n,n_1,\overset{h_1}{\dots},n_1,\dots,n_r = 1)$ y tal que $\#(\mathbb{N}-S') < \infty$.

<u>Demostración</u>.

(i) Consideremos en la matriz del desarrollo de H-N de $\mathcal{O}_o$ las dos primeras cajas C_o, C_1 con filas distinguidas (0-6), 1,i, respectivamente. Esto nos dice que en la parametrización asociada es $x_i = a_{o1,i}\, x_1 + \dots + a_{oh,i}\, x_1^h + x_1^h\, z_1$ de lo cual deducimos $x_1^h\, z_1 = w_1 \in \mathcal{O}_o$ y por tanto $o(w_1) = hn + n_1$.

(ii) Supongamos que para todo $i < s$ existe $w_i \in \mathcal{O}_o$, $w_i = x_1^h\, w_1^{h_1} \dots w_{i-1}^{h_{i-1}}\, z_i$ con $o(w_i) = hn + h_1\,\beta_1 + \dots + h_i\,\beta_{i-1} + n_i$ y $\beta_j = o(w_j)$.

Supongamos que la matriz tiene las s+1 primeras cajas de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ \\ \\ g \rightarrow \\ \\
\end{array}
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
1\ 0 \dots 0 & & & & & \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & & & & \\
 & 1\ 0 \dots 0 & & & & \\
 & & \dots\dots & & & \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots & 1\ 0 \dots 0 & \dots\dots & 1\ 0 \dots 0 \\
 & & & C_k & & C_{s+1}
\end{array}\right)
$$

donde la fila marcada en la caja C_{s+1} es la g, y la caja anterior a ella con igual fila marcada es la C_k.

Esta situación se refleja en el desarrollo de la forma siguiente

(1) $z_k = a_{k+1\;1,g}\, z_{k+1} + \dots + a_{k\;h_{k+1},g}\, z_{k+1}^{h_{k+1}} + z_{k+1}^{h_{k+1}}\, z_{k+2,g}$

(2) $z_{k+2,g} = a_{k+3\;1,g'}\, z_{k+3} + \dots + a_{k+3\;h_{k+3},g'}\, z_{k+3}^{h_{k+3}} + z_{k+3}^{h_{k+3}}\, z_{k+4,g'}$,

con $g' = \left\{ \begin{array}{l} g \\ g+1 \end{array} \right.$

(3) $z_{s-1,j} = a_{s-1\;1,j}\, z_{s-1} + \dots + z_{s-1}^{h_{s-1}}\, z_s$ con $j = \left\{ \begin{array}{l} g \\ \text{ó} \\ g+1 \end{array} \right.$

de (1) deducimos $\frac{w_{k+1}}{z_{k+1}} \frac{w_k}{z_k} z_k - a_{k+1\;1,g}\, w_{k+1}\, w_k = w_{k+1} \frac{w_k}{z_k} (a_{k+1\;2,g}\, z_{k+1}^2 + \dots + z_{k+1}^{h_{k+1}}\, z_{k+2,g}) \in \mathcal{O}_o$ multiplicamos el resultado anterior por $\frac{w_{k+1}}{z_{k+1}}$ y le sumamos $-w_{k+1}^2 \frac{w_k}{z_k} a_{k+1\;2,g}$, obtenemos $w_{k+1}^2 \frac{w_k}{z_k} (a_{k+1\;3,g}\, z_{k+1}^3 + \dots + z^{h_{k+1}}\, z_{k+2,g}) \in \mathcal{O}_o$. Continuando el proceso, en la etapa h_{k+1} obtendremos (4) $w_{k+1}^{h_{k+1}} \frac{w_k}{z_k} z_{k+2,g} \in \mathcal{O}_o$.

Sustituimos en (4) $z_{k+2,g}$ por (2) y procedemos análogamente a como hicimos con (1). Continuamos el proceso en las siguientes cajas hasta llegar a (3) y obtenemos $\frac{w_k}{z_k} w_{k+1}^{h_{k+1}} \cdots w_{s-1}^{h_{s-1}} z_s \in \mathcal{O}_o$ es decir $x_1^h w_1^{h_1} \cdots w_{k-1}^{h_{k+1}} w_{k+1}^{h_{k+1}} \cdots w_{s-1}^{h_{s-1}} z_s \in \mathcal{O}_o$ y puesto que $w_k^{h_k} \in \mathcal{O}_o$ obtenemos $w_s = x_1^h w_1^{h_1} \cdots w_k^{h_k} \cdots w_{s-1}^{h_{s-1}} z_s \in \mathcal{O}_o$ con $o(w_s) = h_n + h_1 \beta_1 + \dots + h_{s-1} \beta_{s-1} + n_s$.

(iii) El semigrupo S' tiene complementario en $\mathbb{N}$ finito ya que el máximo común divisor de los generadores es $(n, \beta_1, \dots, \beta_r) = (n, n_1, \dots, n_r, 1) = 1$.

<u>Corolario 2.5</u>. Dado un desarrollo de H-N, $|D, \chi, A|$ con χ parametrización de $\mathcal{O}_o$, existe un subsemigrupo $S' \subset S(D)$ con S' generado como en el lema anterior y tal que $\#(\mathbb{N}-S') < \infty$.

Demostración.

Tomemos los elementos del desarrollo $\{x_1^*, w_1^*, \ldots, w_r^*\}$ tales que sus residuos sean $\{x_1, w_1, \ldots, w_2\}$ del lema anterior, por medio de los cuales generamos el semigrupo S' de $\mathcal{O}_o$. Dichos elementos son potencias y productos de los elementos de D, $\{x_1, z_1, \ldots, z_r\}$ que son series en $A||t||$ con coeficiente del término de menor grado unidad y $z_r = t$.

Consideremos S como el generado por $\{o(x_1^*), o(w_1^*), \ldots, o(w_2^*)\}$ que está contenido en $S(D)$ y por el lema anterior $\#(N-S') < \infty$.

Todos los desarrollos de H-N de $\mathcal{O}_o$ tienen en común que la fibra genérica tiene igual sucesión de multiplicidades que $\mathcal{O}_o$. La forma más canónica de manejar una curva a partir de su sucesión de multiplicidades es considerar su cierre de Arf (0-8.3), cuya construcción damos a continuación.

Nota 2.6. En (2.6 |11|) se da una construcción explícita de la matriz del desarrollo de H-N del cierre de Arf $\mathcal{O}_o^*$ de una curva algebroide irreducible $\mathcal{O}_o$, que esencialmente es como sigue:

Consideramos la base de Apery de $S(\mathcal{O}_o^*)$ relativa a n, es decir el conjunto de enteros $\{a_o, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ definido por $a_o = n$ y $a_i = \min \{\gamma \in S \mid \gamma \equiv i (\mathrm{mod}\ n)\}$ $0 < i < n$. La matriz de $\mathcal{O}_o^*$ la construimos añadiendo a la matriz de $\mathcal{O}_o$ una fila de la forma $(0 \ldots. 0\ 1\ 0 \ldots.)$ para unos ciertos a_j de la base de Apery, y tales que el 1 está en el lugar necesario para proporcionar al semigrupo $S(\mathcal{O}_o^*)$ el nuevo valor a_j. La nueva matriz tendrá n filas, donde $e(\mathcal{O}_o) = n$.

<u>Teorema 2.7</u>. Dada una curva irreducible $\mathcal{O}_o$, existe un desarrollo de H-N miniversal de $\mathcal{O}_o$, $|D^*, \mathcal{O}_o, R|$ con $R \in \hat{\mathcal{C}}$ regular.

<u>Demostración</u>.

Sea c' el conductor del subsemigrupo de $S(\mathcal{O}_o)$ del corolario 2.5.

(i) Definimos $R = k||u_{ij}||$ con $i=0,\ldots,c'-1$, $j=1,\ldots,n$, $e(\mathcal{O}_o)=n$, y donde $u_{ij} = 0$ cuando ij es el índice correspondiente a los 1 y ceros de las filas marcadas de la matriz de H-N de $\mathcal{O}_o$.

(ii) El desarrollo miniversal D^* lo definimos como un desarrollo que tiene como matriz (b_{ij}) $i=0,\ldots,\infty$, $j=1,\ldots,n$ donde b_{ij} son como sigue:

(a) Sea $j=1,\ldots,N$ y sea (a_{ij}) la matriz de H-N de $\mathcal{O}_o$.

Si ij es un índice correspondiente a unos y ceros de filas marcadas, b_{ij} es 1 ó 0 según lo sea a_{ij}.

Si ij es tal que $c' \leq i$, $b_{ij} = a_{ij}$.

Si ij no es ninguno de los dos casos anteriores $b_{ij} = a_{ij} + u_{ij}$.

(b) Sea $j = N+1,\ldots,n$ entonces $b_{ij} = u_{ij}$.

(iii) $|D^*, \mathcal{O}_o, R|$ es miniversal. En efecto:

Sea $|D', \mathcal{O}_o, A'|$ donde la matriz de D' es (b'_{ij}) y la de $\mathcal{O}_o$, (a_{ij}). Definimos $\eta : R \to A'$ por $\rho(u_{ij}) = b'_{ij} - a_{ij}$. La imagen de D^* $\rho^*(D^*)$ es un desarrollo de H-N de $\mathcal{O}_o$ sobre A', que coincide con D' en las c' primeras columnas. Sea c el conductor de $S(D')$ puesto que $c \leq c'$, $\rho^*(D^*)$ es equivalente a D' (I-5.5).

Nota 2.8. La construcción del desarrollo versal en el teorema anterior depende del desarrollo de H-N de la curva $\mathcal{O}_o$. Este desarrollo no es único pues varía según las posibilidades de elegir la fila marcada (0-6), pero se puede dar un desarrollo que fijada la primera fila marcada sea, en cierto sentido, único con lo que el desarrollo de H-N miniversal estará univocamente determinado |11|.

Dichos desarrollo es como sigue: Si para cada caja C_j se marca la fila i, para la caja C_{j+1} se marcará, si hay varias posibilidades, la fila i' más próxima a i con i' < i. Si no es posible, la fila i' más próxima a i con i < i'.

Nota 2.9. Si consideramos un functor similar al functor $\overline{HN}$, pero considerando deformaciones que admitan desarrollo de H-N, no podemos, en principio, encontrar la deformación miniversal, pues el desarrollo miniversal hallado no nos determina en general una deformación. No obstante, encontramos un representante miniversal en una categoría más amplia a la de deformaciones que admiten desarrollo $\mathcal{H}_D$, la categoría $\mathcal{D}$ de desarrollos de H-N.

REFERENCIAS

Como referencias de esta memoria queremos presentar las que han sido citadas explícitamente a lo largo de ella, es decir, no pretendemos presentar una bibliografía exhaustiva del tema.

A lo largo de toda la memoria se utiliza sin número de referencia la obra E.G.A., "Elements de Géometrie Algébrique" de A. Grothendieck y J. Dieudonné, Pub. Math. I.H.E.S. números 8, 11, 20.

|1| ABHYANKAR, S.S., "Local uniformization of algebraic Surfaces over ground fields of characteristic $p \neq 0$". Amer. J. of Math. 63 (1956), p. 491-526.

|2| ABHYANKAR, S.S., "Note on coefficient fields". Amer. J. of Math. 90 (1968), p. 347-355.

|3| ARF, C., "Une interprétation algébrique de la suite des ordres de multiplicité d'une branche algebrique". Proc. of the London Math. Soc. (2), 50 (1949), p. 256-287.

|4| BENNET, B.M., "On the characteristic functions of a local ring" Ann. of Math. 90 (1970), p. 25-87.

|5| BRAUNER, K., "Zur Geometrie der Funktionen Zweier Komplexen Veränderlichen". Abh. Math. Sem. Hamburg, 6 (1928), p. 1-54.

|6| BRIANÇON, J., GALLIGO, A. y GRANGER, M., "Deformations equisingulieres des germes de courbes gauches reduites". Mem. de la Soc. Math. de France n° 1, 108 (1980).

|7| BUCHWEITZ, R. y GREUEL, G., "The Milnor number and deformations of complex curve singularities". Preprint, Febrero (1980).

|8| BURAU, W., "Kennzeichnung der Schlauchknoten". Abh. Math. Sem. Hamburg, 9 (1928), p. 125-133.

|9| CAMPILLO, A., "Algebroid curves in positive characteristic". Lecture Notes in Math., n° 813, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1980).

|10| CAMPILLO, A., "Hamburger-Noether techniques in equisingular deformation theory of plane curve singularities". Preprint. Diciembre (1980), Universidad de Valladolid.

|11| CAMPILLO, A. y CASTELLANOS, J., "On projections of spaces curves". Actas de la Conferencia sobre Singularidades". La Rábida (1981).

|12| EBEY, S., "The clasification of singular points of algebraic curves". Trans. the Amer. Math. Soc. 118 (1965). p.454-471.

|13| HARTSHORNE, R., "Algebraic Geometry". Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York (1977).

|14| HERRMANN, M. y ORBANZ, U., "Reduction,equimultiplicity and normal flatness". Conferencia de Singularidades. La Rábida (1981).

|15| HIRONAKA, H., "Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero". I y II. Ann. Math. 79 (1964).

|16| LIPMAN, J., "Quasi-ordinary singularities of embedded surfaces". Ph. D. Thesis, Harvard Univ. (1965).

|17| LIPMAN, J., "Equimultiplicity, reduction and blowing-up". Preprint (1980).

|18| LIPMAN, J., "Stable ideals and Arf rings". Amer. J. Math. 93 (1971), p. 649-685.

|19| LUENGO, I., "Sobre la estructura de las singularidades de las superficies algebroides sumergidas". Tesis doctoral, Universidad Complutense. Madrid (1979).

|20| MATSUMURA, H., "Commutative Algebra". W. A. Benjamin Co. New York. (1970).

|21| NAGATA, M., "Local Rings". Tracts in Math. n° 13. Interscience Publ. New York. London. (1962).

|22| MERLE, M., "Sur l'espace des modules des curves de semi-groupe donné". C.R. Acad., Sci. Paris Ser A-B vol. 284 (1977), n° 11, p. A-611-A-614.

|23| NOBILE, A., "Equisingular deformations of Puiseux expansions". Trans. Amer. Math. Soc. 214 (1975), p. 113-135.

|24| NOBILE, A., "On equisingular deformations of plane curves singularities". III. J. Math. 22 (1978), p. 476-498.

|25| ROMO, C., "Resolución de singularidades de variedades algebroides sobre un cuerpo de característica cualquiera". Publicaciones del Instituto Jorge Juan, n° 10, C.S.I.C. Madrid (1976).

|26| SCHLESSINGER, M., "Functor of Artin rings". Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968), p. 208-222.

|27| STUZ, J. y BECKET, J., "Resolving singularities via local transformations". Rice Uni. Studies 59 (1973), p. 1-9.

|28| TEISSIER, B., "The hunting of invariants in the geometrie of discriminants". Nordic Summer School. Simp. in Math. Oslo (1976).

|29| TEISSIER, B., "Resolution simultanee I, II". Seminaire sur les singularities des surfaces. Lecture Notes in Math. n° 277 Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York (1980).

|30| TEISSIER, B., Apéndice a "Le probleme des modules pour les branches planes" |36|. Ecole Polytechnique. Paris (1973).

|31| VICENTE, J.L., "Singularidades de curvas algebroides alabeadas". Tesis. Universidad Complutense. Madrid (1973).

|32| WAHL, J., "Deformations of plane algebroid curves with nodes and cusps". Amer. J. of Math. 96 (1974), p. 529-577.

|33| WAHL, J., "Equisingular deformations of plane algebroide curves". Trans. of the Amer. Math. Soc. 193 (1974), p. 143--170.

|34| ZARISKI, O. y SAMUEL, P., "Commutative Algebra" Vol. II. D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton (1960).

|35| ZARISKI, O., "Contribution to the problem of equisingularity" C.I.M.E. Varema Edizzioni Cremmese, Roma (1970), p. 261--343.

|36| ZARISKI, O., "Le probleme des modules pour les branches planes". Ecole Polytechnique. Paris (1973).

|37| ZARISKI, O., "Studies equisingularity" (I), Amer. J. Math. 87 (1965), p. 507-535. (II) Amer. J. Math. 87 (1965), p. 972-1006. (III) Amer. J. Math. 90 (1968), p. 961-1023.

|38| ZARISKI, O., "General theory of saturation and saturated local rings". (I) Amer. J. Math. 93 (1971), p. 573-648. (II) Amer. J. Math. 93 (1971), p. 872-964. (III) Amer. J. Math. 97 (1975), p. 415-502.

|39| ZARISKI, O., "on the topology of algebroid singularities". Amer. J. of Math. 54 (1932), p. 453-465.